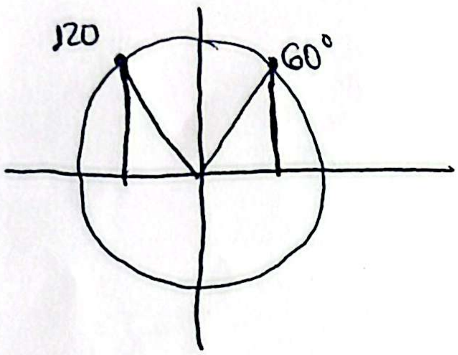
Examen TRIGONOMETRÍA 2021/22

Ejercicio 1:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{x = 60^\circ}$



SOLUCIÓN:

$x = 60^\circ + 360k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 120^\circ + 360k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x$

$2\operatorname{sen}x \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$2\operatorname{sen}x \cos x \cos x = \operatorname{sen}x$

$2\operatorname{sen}x \cos^2 x = \operatorname{sen}x$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}$ Sustituyo en la ecuación.

$2\operatorname{sen}x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}x$

$2\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}x$

$-2\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x = 0$

$-2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}x = 0$

$\operatorname{sen}x(-2\operatorname{sen}^2 x + 1) = 0$

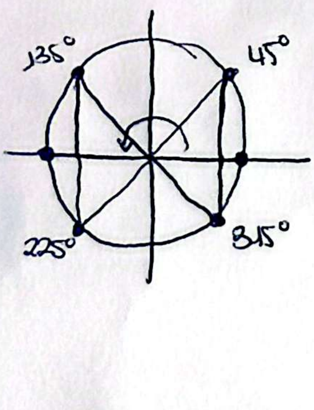
$\rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \operatorname{arcsen}(0) \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ}$

$\rightarrow -2\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen}^2 x = -1$

$\operatorname{sen}^2 x = 1/2$

$\operatorname{sen} x = \sqrt{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{x = 45^\circ}$



SOL:

$x = 0^\circ + 180k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 45^\circ + 90k,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$

$4(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 3\cos x = 1$

$4\cos^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 1$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$4\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 1$

$4\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x + 3\cos x = 1$

$8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \cos x}$

$\Rightarrow 8t^2 + 3t - 5 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 8\cdot(-5)}}{2\cdot 8}$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} \Rightarrow t = \frac{-3 \pm 13}{16}$$

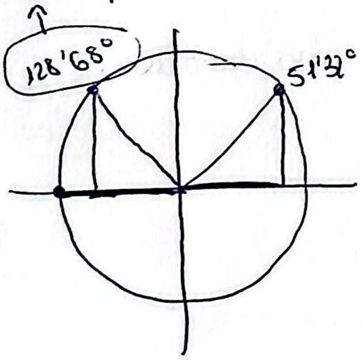
$\boxed{t_1 = \frac{5}{8}} \Rightarrow \cos x = 5/8 \Rightarrow x = \arccos(5/8)$

$\boxed{x = 51'32^\circ}$

$\boxed{t_2 = -1} \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \arccos(-1)$

$\boxed{x = 180^\circ}$

no se cumple.



SOL:

$x = 180^\circ + 360K, \ K \in \mathbb{Z}$

$x = 51'32^\circ + 360K, \ K \in \mathbb{Z}$

d) $sen^3 x - sen x \cos x = 0$

$sen x (sen^2 x - \cos x) = 0$ → $sen x = 0 \Rightarrow x = arcsen(0) \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ}$

→ $sen^2 x - \cos x = 0$

Sabemos que $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$\boxed{sen^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - \cos x = 0$

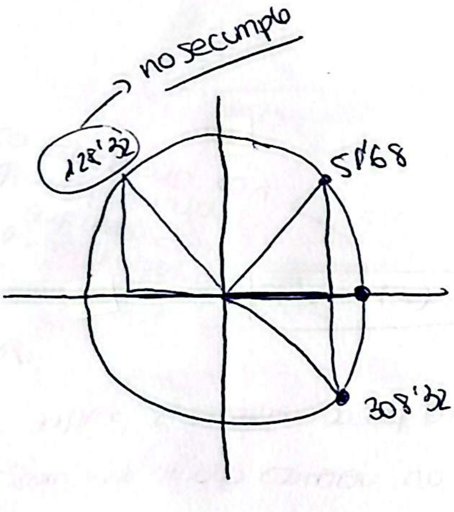
$-\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\cos x = t}$

$-t^2 - t + 1 = 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2}$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$ → $\boxed{t_1 = -1'62} \Rightarrow \cos x = -1'62 \Rightarrow \nexists$ sol.

→ $\boxed{t_2 = 0'62} \Rightarrow \cos x = 0'62 \Rightarrow \boxed{x = 51'68^\circ}$



Soluciones:

$x = 0^\circ + 180k, \, k \in \mathbb{Z}$

$x = 51'68^\circ + 360k, \, k \in \mathbb{Z}$

$x = 308'32^\circ + 360k, \, k \in \mathbb{Z}$

② DEMUESTRA

$2\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right) = 1$

$2\left(\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\cos x\right) = \frac{2+2\cos x}{2} - \cos x = \frac{2+\cancel{2\cos x}-\cancel{2\cos x}}{2}$

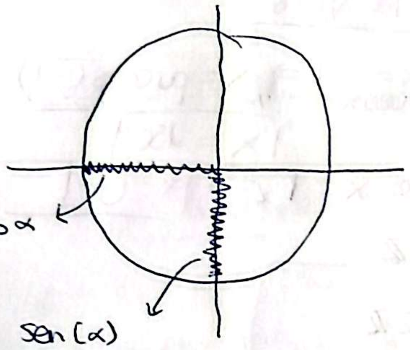
$= \frac{2}{2} = 1$

□ q.e.d.

Ejercicio 3:

a) Falso. No es posible crear un triángulo rectángulo con una base que mida igual que su hipotenusa. Nos basamos en el Teorema de Pitágoras, que dice que las sumas de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado, por lo que los lados tienen que ser necesariamente menores que la hipotenusa. Solo sería posible si un cateto midiera igual que la hipotenusa y el otro cateto midiera 0, p.e. $5^2 + 0^2 = 5^2$, cosa que lógicamente NO es posible que suceda, pues un lado no puede medir 0.

b) Tercer cuadrante: $\cos\alpha = -0'15 \Rightarrow ¿\text{sen}\,\alpha = 0'5?$



cos α

sen (α) tiene que ser negativo

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\text{sen}^2\alpha + (-0'15)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - 0'0225$$

$$\text{sen}^2\alpha = 0'9775$$

$$\text{sen}\,\alpha = \pm 0'99 \Rightarrow \boxed{\text{sen}(\alpha) = -0'99}$$

nos quedamos con el valor negativo, pq hemos visto que tenía que ser < 0.

→ ya podríamos decir que el sen(α) no puede valer 0'5 porque tiene que ser un valor negativo, aún así, veremos cuánto debe medir

$\Rightarrow$ El enunciado era falso.

c) Falso. Veamos un contraejemplo.

Si $\alpha = 90°$

$$\text{sen}(90°) = 1 \Rightarrow \text{cosec}(90°) = \frac{1}{\text{sen}(90)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos(90°) = 0 \Rightarrow \sec(90°) = \frac{1}{\cos(90)} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{tiende a } \infty.$$

d) $\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha) < \text{sen}(\alpha) \\ \text{tg}(\alpha) > \text{sen}(\alpha)\end{array}\right\}$ ¿No existe?

Falso. Sí existe. Veamos un contraejemplo: $\boxed{\alpha = 60°}$

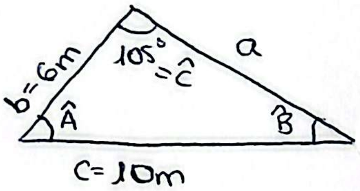
$\text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos(\alpha) < \text{sen}(\alpha) \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0'5 < 0'87$

$\cos(60°) = 1/2$ $\qquad$ $\text{tg}(\alpha) > \text{sen}(\alpha) \Rightarrow \sqrt{3} > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1'73 > 0'87.$

$\text{tg}(60°) = \sqrt{3}$ $\qquad$ Así, queda demostrado que sí existe.

Ejercicio 4:

a)



Aplicando el Teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \frac{10}{\operatorname{sen}105^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{6}{10/\operatorname{sen}105^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = 0'58 \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}(0'58) \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 35'42^\circ}$$

Averiguo el ángulo $\hat{A}$:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$$

$$\hat{A} + 35'42 + 105 = 180$$

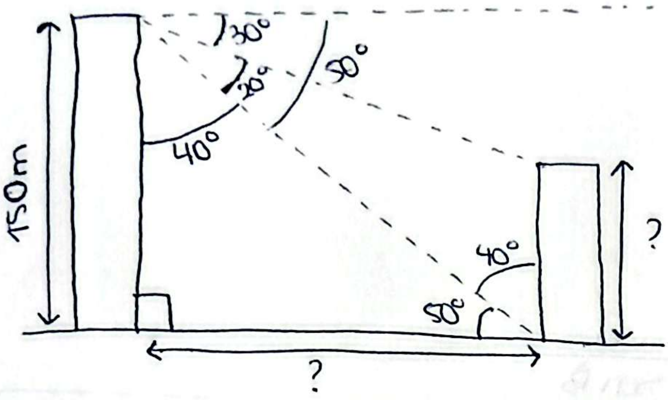
$$\boxed{\hat{A} = 39'58^\circ}$$

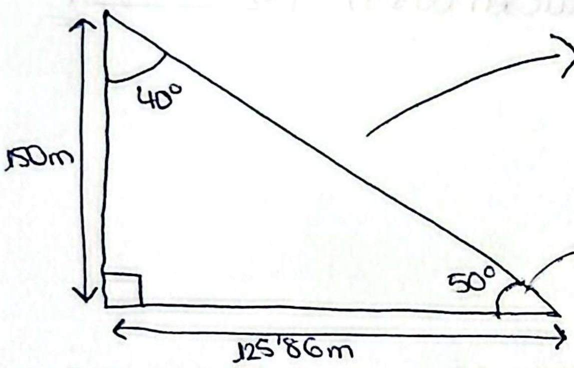
Vuelvo a aplicar el teorema del seno para averiguar el lado a:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}39'58^\circ} = \frac{10}{\operatorname{sen}105^\circ} \Rightarrow a = \frac{10 \cdot \operatorname{sen}39'58^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 6'60\,m}$$

b)





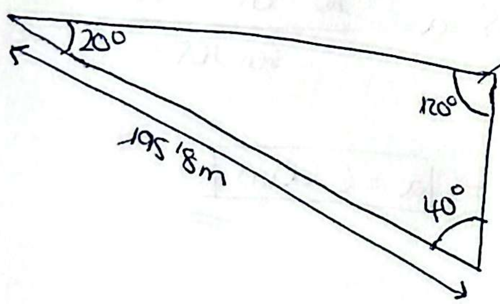
Averiguo la hipotenusa con Pitágoras:

$h^2 = 150^2 + 125'86^2 \Rightarrow h = \underline{195'8m}$

$180 - 40 - 90 =$
$= 50°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{150}{\text{sen } 50°} = \frac{x}{\text{sen } 40°} \Rightarrow x = \frac{150 \cdot \text{sen } 40°}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \boxed{x = 125'86m}$$



$180 - 40 - 20 = 120°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{195'8}{\text{sen } 120°} = \frac{x}{\text{sen } 20°} \Rightarrow x = \frac{195'8 \cdot \text{sen } 20°}{\text{sen } 120°}$$

$$\boxed{x = 77'33m}$$

SOLUCIÓN: la anchura de la calle es de 125'86m y el altura del edificio más bajo es de 77'33m.