# Examen tema 5 Números complejos

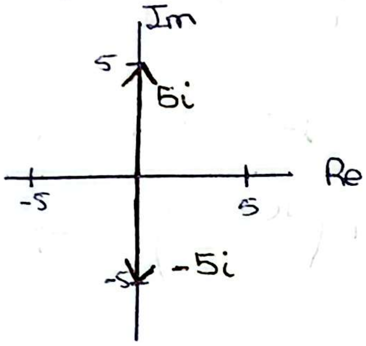
—— SOLUCIÓN 2021/2022 ——

1

a) $z^2+25=0 \Rightarrow z^2=-25 \Rightarrow z=\sqrt[2]{-25}=\sqrt[2]{25_{180^\circ}}=$

$= \underbrace{5_{90^\circ+180K}}$ $(K \in \{0,1\})$

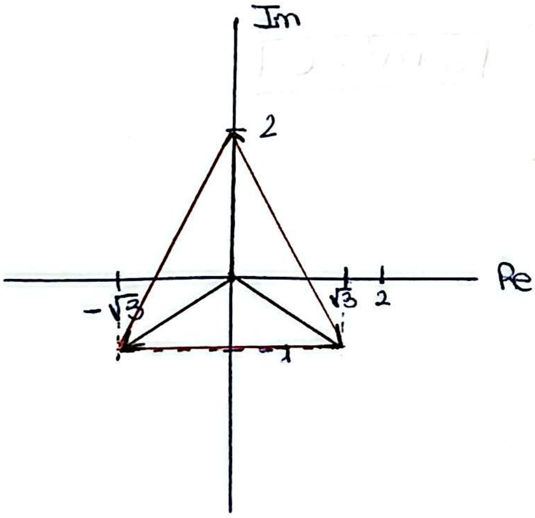
$$\begin{cases} z_0\,(K=0) \Rightarrow 5_{90^\circ} \Rightarrow 5(\overset{\to 0}{\cancel{\cos 90^\circ}} + \overset{\to 1}{\cancel{sen\,90^\circ}} \cdot i) \Rightarrow \boxed{5i} \\ z_1\,(K=1) \Rightarrow 5_{270^\circ} \Rightarrow 5(\underset{0}{\cancel{\cos 270^\circ}} + \underset{-1}{\cancel{sen\,270^\circ}} \cdot i) \Rightarrow \boxed{-5i} \end{cases}$$




b) $z^3+8i=0 \Rightarrow z^3=-8i \Rightarrow z=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8_{270^\circ}}=2_{90^\circ+120K}$

$K \in \{0,1,2\}$

$$\begin{cases} z_0\,(K=0) \Rightarrow 2_{90^\circ} \Rightarrow 2(\overset{\to 0}{\cancel{\cos 90^\circ}} + \overset{\to 1}{\cancel{sen\,90^\circ}} \cdot i) = \boxed{2i} \\ z_1\,(K=1) \Rightarrow 2_{210^\circ} \Rightarrow 2(\cos 210^\circ + sen\,210^\circ \cdot i) = \boxed{-\sqrt{3}-i} \\ z_2\,(K=2) \Rightarrow 2_{330^\circ} \Rightarrow 2(\cos 330^\circ + sen\,330^\circ \cdot i) = \boxed{\sqrt{3}-i} \end{cases}$$



c) $\begin{cases} z+3w = 1+2i \Rightarrow \boxed{z = 1+2i-3w} \rightarrow \text{Sustituyo en la otra ecuación.} \\ iz + w = 2-i \end{cases}$

$\Rightarrow i(1+2i-3w)+w = 2-i \Rightarrow$

$\Rightarrow i-2-3wi+w = 2-i \Rightarrow$

$\Rightarrow -3wi+w = 2-i+\cancel{2}-i \Rightarrow$

$\Rightarrow w(-3i+1) = -2i \Rightarrow$

$\Rightarrow w = \dfrac{-2i}{-3i+1} \cdot \dfrac{-3i-1}{-3i-1} = \dfrac{-6+2i}{-9-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{w} = \dfrac{-6+2i}{-10} \Rightarrow \boxed{\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i}$

→ Ahora, calculamos $z$:

$z = 1+2i-3w \Rightarrow z = 1+2i-3\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i\right) = 1+2i-\dfrac{9}{5}+\dfrac{3}{5}\cdot i$

$\Rightarrow z = \left(1-\dfrac{9}{5}\right) + \left(2+\dfrac{3}{5}\right)\cdot i \Rightarrow \left(\dfrac{5-9}{5}\right) + \left(\dfrac{10+3}{5}\right)\cdot i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z = \dfrac{-4}{5} + \dfrac{13}{5}\cdot i}$

(2) Queremos que $(2+ai)(3-ai)$ sea <u>un imaginario puro</u>.

$(2+ai)(3-ai) = 6-2ai+3ai+a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (6+a^2) + (-2a+3a)\cdot i = \underbrace{6+a^2+ai}$

Si queremos que sea imaginario puro, $\boxed{6+a^2=0}$

$a^2 = -6 \Rightarrow a = \pm\sqrt{-6} = \pm\sqrt{6}\cdot i$

Solución: $\boxed{a = \pm\sqrt{6}\cdot i}$

③

a) $z = 5+i \Rightarrow |z| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26} \neq 4.$

↳ Falso. Lo hemos comprobado.

b) Dos raíces consecutivas son $2_{60°}$ y $2_{120°}$ → ¿el valor de n es 6?

$\underbrace{2_{60°} \quad 2_{120°}}_{+60°}$

$\frac{360}{n} = 60 \Rightarrow \boxed{n=6}$

↳ VERDADERO, pues 360/n debe ser 60, ya que los grados van de 60 en 60, y entonces n tiene que ser 6, corresponde a una raíz sexta y si se representara formaría un hexágono regular.

c) $(a+bi)(c+di)$ → Imaginario puro → ¿$b=d=0$?

Comprobamos si $b=d=0$:

$a \cdot c$ = NO DA UN IMAGINARIO PURO.

Pero si $a=c=0$, se anula la parte real y entonces sí da un imaginario puro.

↳ Por tanto, la afirmación es FALSA.

d) $z = \sqrt{2}_{315°}$ + $w = 1_{90°}$ } $Im(K) = 0$

Pasamos a forma binómica:

$z = \sqrt{2}_{315°} = \sqrt{2} \cdot (\cos 315° + \operatorname{sen} 315° \cdot i) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \boxed{1-i}$

$w = 1_{90°} = 1(\cancel{\cos 90°}^{\to 0} + \cancel{\operatorname{sen} 90°}^{\to 1} \cdot i) \Rightarrow \boxed{w=i}$

$\rightarrow z+w = 1-i+i = \boxed{1}$, $Im(K) = 0$. ✓.

↳ VERDADERO.

④

a) Demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Sabemos que $|u|^2 = u \cdot \bar{u}$:

$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\overline{z+w}) = (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) =$$

$$= z\cdot\bar{z} + z\cdot\bar{w} + w\cdot\bar{z} + w\cdot\bar{w}.$$ Sabemos que: $\begin{cases} z\cdot\bar{z} = |z|^2 \\ w\cdot\bar{w} = |w|^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{|z|^2 + |w|^2 + z\cdot\bar{w} + w\cdot\bar{z}}$$ PRIMER TÉRMINO. (1)

Ahora desarrollamos el segundo término de la misma forma:

$$|z-w|^2 = (z-w)\cdot(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} - w\bar{w} =$$

$$= \boxed{|z|^2 - |w|^2 - z\bar{w} - w\bar{z}}$$ 2º TÉRMINO (2)

Sumamos (1) y (2):

$$|z|^2 + |w|^2 + \cancel{z\cdot\bar{w}} + \cancel{w\bar{z}} + |z|^2 - |w|^2 - \cancel{z\bar{w}} - \cancel{w\bar{z}} =$$

$$= 2|z|^2 + 2|w|^2 = \boxed{2(|z|^2 + |w|^2)}$$ $\square$ q.e.d.

b) $z^2 = \bar{z} \Rightarrow (a+bi)^2 = a - bi \Rightarrow a^2 + b^2 i^2 + 2\cdot abi \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a - bi \Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a - bi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \Rightarrow 2ab + b = 0 \Rightarrow b(2a+1) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \boxed{b=0} \ (1) \\ \searrow \boxed{2a+1=0} \ (2) \end{matrix}$$

(1) Si $b = 0 \Rightarrow a^2 - 0 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0$ $\begin{matrix} \nearrow \boxed{a=0} \\ \searrow \boxed{a=1} \end{matrix}$

$\rightarrow$ Si $a = 0$, $b = 0 \Rightarrow \boxed{z_1 = 0}$ ✓

$\rightarrow$ Si $a = 1$, $b = 0 \Rightarrow \boxed{z_2 = 1}$ ✓

(2) Si $2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1/2 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} - b^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -b^2 = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-2-1}{4} = \frac{-3}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\rightarrow$ Si $a = -1/2$, $b = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \boxed{z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i}$ ✓

$\rightarrow$ Si $a = -1/2$, $b = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow \boxed{z_4 = -1/2 - \sqrt{3}/2 \cdot i}$ ✓

Estos cuatro números complejos (V) cumplen las condiciones.

c) $Z = (i^{10}+i^{11}+\dots+i^{19}+i^{20})(3+k\cdot i) \rightarrow ¿k? \rightarrow |z|=5.$

Nos encontramos ante una progresión geométrica de razón $r=i$.

Suma de los términos de una progresión geométrica:

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Rightarrow \frac{i^{10}\cdot(i^{11}-1)}{i-1} = \frac{-1(-i-1)}{i-1} = \frac{i+1}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1} =$$

$$= \frac{\cancel{-1+1}+2i}{-1-1} = \frac{2i}{-2} = \boxed{-i}$$

$$(-i)(3+k\cdot i) \Rightarrow -3i+k = z,\ |z| = \left(\sqrt{9+k^2}\right)^2 = 5^2$$

$$\hookrightarrow 9+k^2 = 25 \Rightarrow \boxed{k=\pm 4}$$

d) $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i \Rightarrow |z|=r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $\boxed{\alpha=45^\circ} \rightarrow \alpha = \text{arctg}(1)$.

$w = -i = 1_{270^\circ}$

$v = 1_{270^\circ}$

Calcula: $z^{2022}\cdot(w^{99}+v)$

$w^{99} = (-i)^{99} = (-1)^{99}\cdot i^{99} = (-1)(-i) = \boxed{i}$

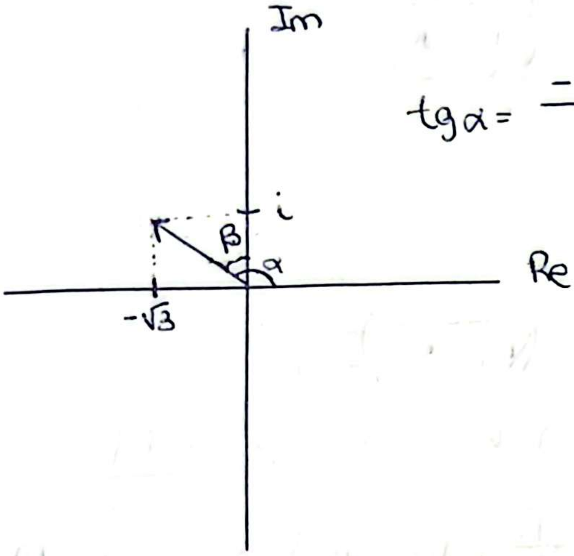
$v = 1_{270^\circ} = -i \qquad \Rightarrow w^{99}+v = i-i = 0$

$z^{2022}\cdot 0 = 0$ (no es necesario calcular $z^{2022}$).

⑤ $\sqrt[6]{z}$. Una de esas raíces es $-\sqrt{3}+i$

La paso a forma polar:

$-\sqrt{3}+i \Rightarrow |z| = r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2$




$tg\,\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \alpha = arctg(-\sqrt{3})$

$\Rightarrow \underbrace{\beta = -60°}$

Si sabemos que β mide 60°, $\alpha = \beta + 90°$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 150°}$

Esa raíz sexta expresada en forma polar es: $2_{150°}$

las demas raíces sextas serán restando y sumando a 150° los 60° de diferencia ($360/n \Rightarrow 360/6 = \underline{\underline{60°}}$)

$$\begin{cases} z_0 = 2_{30°} \Rightarrow 2\cdot(\cos 30° + sen\, 30°\cdot i) = \boxed{\sqrt{3}+i} \\ z_1 = 2_{90°} \Rightarrow 2\cdot(\cos 90° + sen\, 90°\cdot i) = \boxed{2i} \\ z_2 = 2_{150°} \Rightarrow 2\cdot(\cos 150° + sen\, 150°\cdot i) = \boxed{-\sqrt{3}+i} \\ z_3 = 2_{210°} \Rightarrow 2\cdot(\cos 210° + sen\, 210°\cdot i) = \boxed{-\sqrt{3}-i} \\ z_4 = 2_{270°} \Rightarrow 2\cdot(\cos 270° + sen\, 270°\cdot i) = \boxed{-2i} \\ z_5 = 2_{330°} \Rightarrow 2\cdot(\cos 330° + sen\, 330°\cdot i) = \boxed{\sqrt{3}-i} \end{cases}$$

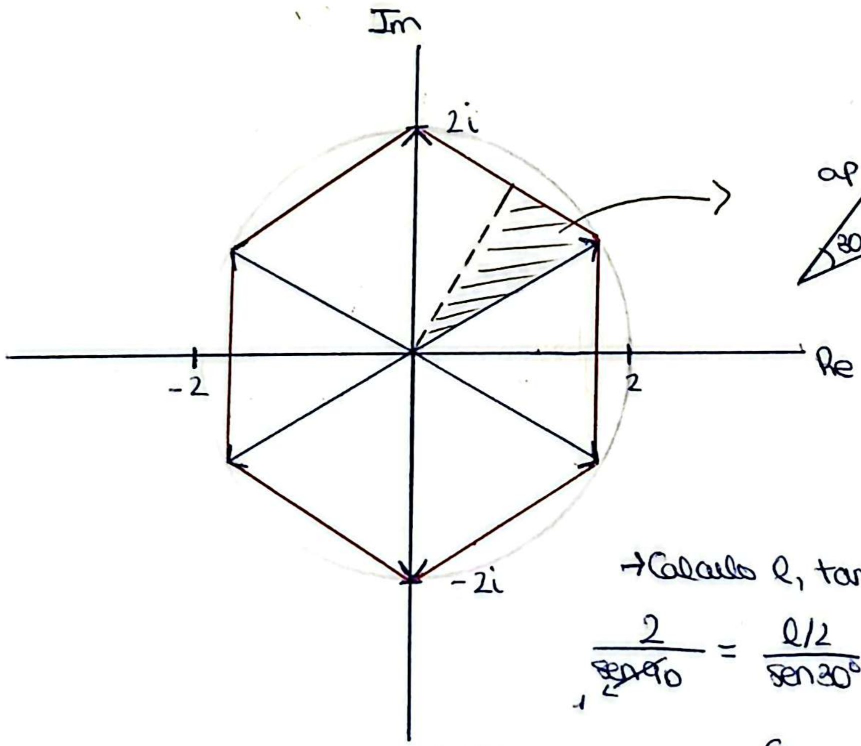
$z = r^6_{\frac{\alpha}{6}} = 2^6$

$\downarrow$

$\dfrac{\alpha}{6} = 30 \rightarrow \underline{\underline{\alpha = 180}}$

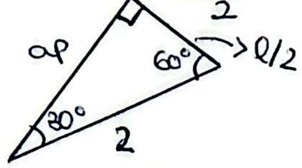
$\boxed{z = 64_{180°} = -64}$

VALOR DE z, A PARTIR DEL QUE SE OBTIENEN LAS 6 RAÍCES.




→ ¿Área del hexágono?

$\dfrac{P\cdot ap}{2}$




→ Calculamos el apotema por el Teorema del Seno:

$\dfrac{2}{\underset{1}{sen\,90°}} = \dfrac{ap}{sen\,60°} \Rightarrow ap = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{ap = \sqrt{3}}$

→ Calculo ℓ, también por el teorema del Seno

$\dfrac{2}{\underset{1}{sen\,90}} = \dfrac{\ell/2}{sen\,30°} \Rightarrow 2\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\ell}{2} \Rightarrow \dfrac{\ell}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{\ell = 2}$

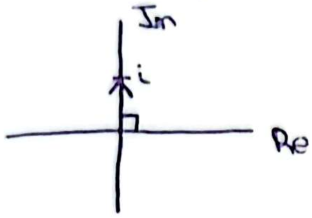
Perímetro $= 6\ell = 6\cdot 2 = \underline{\underline{12}}$ $\rightarrow \boxed{Área = \dfrac{P\cdot ap}{2} = \dfrac{12\cdot\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,m^2}$ → (supongo metros como unidad de medida).

⑥ Demostrar que $i^i$ es un número real puro y hallar su valor exacto.

Partimos de la igualdad llamada Exponencial de Euler:

$$e^{i \cdot \theta} = \cos(\theta) + i \ \operatorname{sen}(\theta)$$

Queremos expresar $i$ en función de esa igualdad.
Sabemos que $i$ se representa de la siguiente forma.




$\Rightarrow$ Por tanto, $\arg(i) = 90°$ ; $\theta = 90°$.

Sustituimos $\theta = 90°$ en la fórmula de la Exponencial de Euler.
Como $90° = \frac{\pi}{2}$ rad, luego:

$$\hookrightarrow e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = \cancelto{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{e^{i \cdot \pi/2} = i}$ Llegamos a esta igualdad.

Sustituimos $i$ en la base por $e^{i\pi/2}$:

$$\hookrightarrow i^i = \left(e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i \cdot i \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{i^2 \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Como $i^2 = -1 \Rightarrow e^{-\pi/2}$

Luego $\boxed{i^i = e^{-\pi/2}}$. Es un número real puro y hemos hallado su valor exacto.

$\square$ q.e.d.