Examen tema 5 Números complejos

Solución 2023/2024

1

a) $z^2 + 4i = 0 \Rightarrow z = \sqrt{-4i} \Rightarrow z = \sqrt{4_{270^\circ}} = \underbrace{2_{135^\circ + 180k}}_{k \in \{0,1\}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0 (k=0) \Rightarrow 2_{135^\circ} = 2 \cdot (\cos 135^\circ + i \cdot \text{sen } 135^\circ) = \boxed{-\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i} \\ z_1 (k=1) \Rightarrow 2_{315^\circ} = 2 \cdot (\cos 315^\circ + i \cdot \text{sen } 315^\circ) = \boxed{\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} zw = -27 \ (1) \\ z + i - w^2 = i \Rightarrow z = i + w^2 - i \Rightarrow \boxed{z = w^2} \text{ Sustituyo en } (1) \end{cases}$

(1) $w^2 \cdot w = -27 \Rightarrow w^3 = -27 \Rightarrow w = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \underbrace{3_{60^\circ + 120k}}_{k \in \{0,1,2\}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_0 = 3_{60^\circ} = 3 \cdot (\cos 60^\circ + i \cdot \text{sen } 60^\circ) = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot i} \\ w_1 = 3_{180^\circ} = 3 \cdot (\cos 180^\circ + i \cdot \text{sen } 180^\circ) = \boxed{-3} \\ w_2 = 3_{300^\circ} = 3 \cdot (\cos 300^\circ + i \cdot \text{sen } 300^\circ) = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot i} \end{cases}$$

- Si $w_0 = 3_{60^\circ} \Rightarrow z_0 = (3_{60^\circ})^2 = 9_{120^\circ} = 9 \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \text{sen } 120^\circ) = \boxed{-\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot i}$
- Si $w_1 = 3_{180^\circ} \Rightarrow z_1 = (3_{180^\circ})^2 = 9_{360^\circ} = 9_{0^\circ} = 9 \cdot (\cos 0^\circ + i \cdot \text{sen } 0^\circ) = \boxed{9}$
- Si $w_2 = 3_{300^\circ} \Rightarrow z_2 = (3_{300^\circ})^2 = 9_{600^\circ} = 9_{240^\circ} = 9 \cdot (\cos 240^\circ + i \cdot \text{sen } 240^\circ) =$
  $= \boxed{-\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot i}$

② $z = \dfrac{-3+b\cdot i}{1-2i}$; $|z| = \sqrt{2} \Rightarrow$ ¿b?

$$z = \frac{-3+b\cdot i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-3+b\cdot i - 6i - 2b}{1+4} = \frac{-3-2b+(b-6)\cdot i}{5} =$$

$$= \boxed{\underbrace{\frac{-3-2b}{5}}_{a} + \underbrace{\frac{(b-6)\,i}{5}}_{b}}$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{-3-2b}{5}\right)^2 + \left(\frac{b-6}{5}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{9+4b^2+12b}{25} + \frac{b^2+36-12b}{25}} = \left(\sqrt{\frac{5b^2+45}{25}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

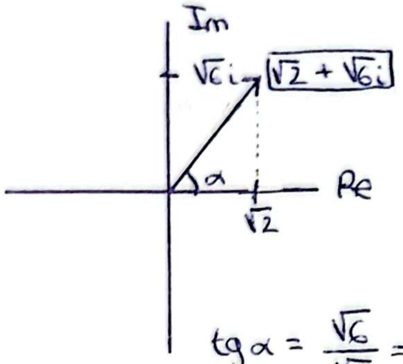
$$\Rightarrow 5b^2+45 = 25\cdot 2 \Rightarrow 5b^2 = 5 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \boxed{b = \pm 1}$$

Solución: $\boxed{b_1 = 1;\ b_2 = -1}$

③ $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$

a)



$tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 60°}$

Hallamos $|z| = r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}}$

• Forma trigonométrica:

$z = r \cdot (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 60° + \operatorname{sen} 60° \cdot i)}$

• Forma polar: $\boxed{r_\alpha = 2\sqrt{2}_{60°}}$

b) z es una de las raíces cuartas de w.

Luego $n = 4 \Rightarrow \dfrac{360}{n} = \dfrac{360}{4} = \boxed{90°}$

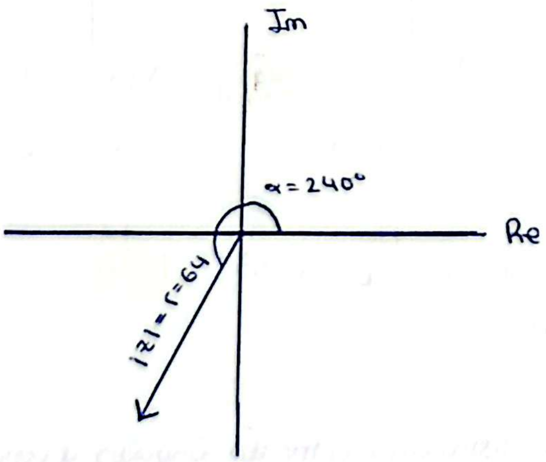
Las otras raíces son:

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = 2\sqrt{2}_{60°} \\ z_1 = 2\sqrt{2}_{150°} \\ z_2 = 2\sqrt{2}_{240°} \\ z_3 = 2\sqrt{2}_{330°} \end{cases}$$

c) $w = r_\alpha \Rightarrow (2\sqrt{2})^4_{60° \cdot 4} \Rightarrow w = 16 \cdot 4 = 64_{240°} = \boxed{64_{240°}}$

Forma polar.

Representación en el plano complejo:



④

a) $z_1 = r_1 \cdot (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot i)$
$z_2 = r_2 \cdot (\cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot i)$

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \iff \alpha = \beta = 0 \rightarrow$$ ¿VERDAD O MENTIRA?

Trabajaremos en forma polar,
Suponemos:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 5 \rightarrow \alpha = 0^\circ \\ r_2 = 7 \longrightarrow \beta = 0^\circ \end{array}\right\} 5_{0^\circ} \cdot 7_{0^\circ} = \boxed{35_{0^\circ}}$$

$\Rightarrow$ FALSO. El producto no es 0. Es $35_{0^\circ} = 35$. Hemos visto un contra ejemplo.

b) $z_1 = 2 + i \Rightarrow |z| = r = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

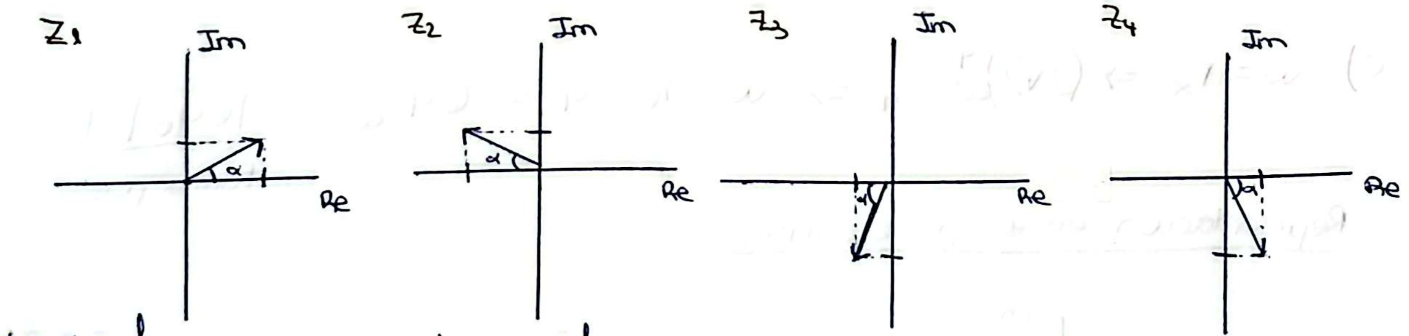
$z_2 = -2 + i \Rightarrow |z| = r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$z_3 = -1 - 2i \Rightarrow |z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$z_4 = 1 - 2i \Rightarrow |z| = r = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

Los módulos de los cuatros son iguales, $\sqrt{5}$.

Los representamos en el plano complejo para averiguar α:



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ | $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-1}{2}$ | $\operatorname{tg}\alpha = 2$ | $\operatorname{tg}\alpha = -2$

$\alpha = 26'56^\circ$ | $\alpha = -26'56^\circ$ | $\alpha = 63'43^\circ$ | $\alpha = -63'43^\circ$

La distancia desde $-63'43^\circ$ a $-26'56^\circ$ es de $36'87^\circ$
la de $-26'56^\circ$ a $26'56$ es de $53,12^\circ$.
la de $26'66^\circ$ a $63'43^\circ$ es de $36'87^\circ$.

Para que fueran raíces cuartas, las distancias entre los ángulos deberían ser de $360/4 = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Por tanto, es FALSO.

4c) Suponemos dos números complejos imaginarios puros:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 4i \\ z_2 = 2i \end{array}\right\} \text{porque } Re(z) = 0.$$

→ ¿ $\frac{z_1}{z_2}$ es imaginario puro?

$$\frac{4i}{2i} = \frac{4}{2} \cdot \cancel{\frac{i}{i}}^{\,1} = \boxed{2} \text{ No. Es real.}$$

→ ¿Y esto es siempre así? Sí. Ya que se dividen los números y las unidades imaginarias $\frac{i}{i}$ se eliminan.

$$\boxed{\frac{a \cdot \cancel{i}}{b \cdot \cancel{i}} = \left(\frac{a}{b}\right)}$$

⇒ Por tanto, el enunciado es FALSO.

(5)

a) $\sqrt{1+\sqrt{3}i} + \sqrt{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{6}$

Primero, elevamos ambos lados a 2.

↳ $\left(\sqrt{1+\sqrt{3}i} + \sqrt{1-\sqrt{3}i}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \cancel{\sqrt{3}i} + 1 - \cancel{\sqrt{3}i} + 2 \cdot \sqrt{1+\sqrt{3}i} \cdot \sqrt{1-\sqrt{3}i} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + 2 \cdot \sqrt{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + 2 \cdot \sqrt{1+3} = 6 \Rightarrow 2 + 2 \cdot \sqrt{4} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + 2 \cdot 2 = 6 \Rightarrow 2 + 4 = 6 \Rightarrow \boxed{6 = 6}$

□ q.e.d.

b) Sea $z = a + b \cdot i$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-b\cdot i}{a-bi} = \frac{a-b\cdot i}{a^2+b^2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|a-b\cdot i|}{a^2+b^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

□ q.e.d.

5c) $\bar{z} = 3_{70^\circ}$

Como el conjugado cambia el signo al argumento, para hallar z cambiamos el signo al argumento:

$$\boxed{z = 3_{-70^\circ}}$$

$$\boxed{z^2 = (3_{-70^\circ})^2 = 9_{-140^\circ}}$$

Para averiguar el opuesto de z^2, sumamos 180° al argumento, de tal forma que nos queda:

$$\boxed{-z^2 = 9_{-140^\circ+180^\circ} = 9_{40^\circ}}$$

d) $[x-(2+i)][x-(3+5i)] = (x-2-i)(x-3-5i) =$

$= x^2 - 3x - 5xi - 2x + 6 + 10i - xi + 3i - 5 =$

$= x^2 + (-3-5i-2-i)x + (6-5+13i) \Rightarrow$

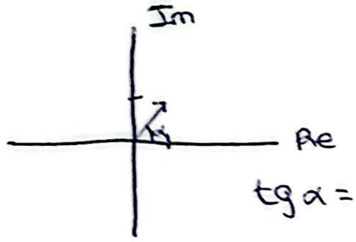
$\Rightarrow \boxed{x^2 + (-5-6i)x + (1+13i) = 0}$

⇒ No nos sale una ecuación con coeficientes reales porque las raíces no son números complejos conjugados.

⑥

$z^5 - 1 - i = 0 \Rightarrow z^5 = 1+i \Rightarrow$ Paso $1+i$ a forma polar.

$1+i \Rightarrow |z| = r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$



$tg\,\alpha = \frac{1}{1}$

$\alpha = arctg(1)$

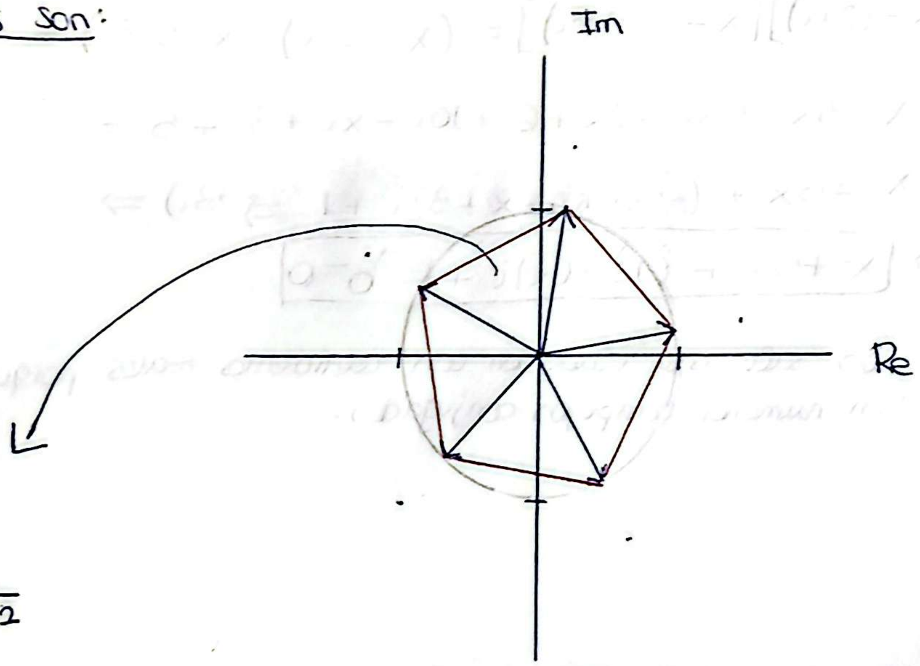
$\boxed{\alpha = 45°}$

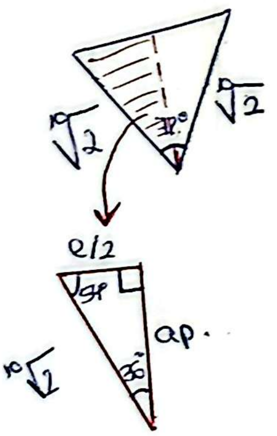
$\Rightarrow$ Por lo tanto $1+i$ expresado en forma polar es $\underline{\sqrt{2}_{45°}}$.

$\Rightarrow z = \sqrt[5]{\sqrt{2}_{45°}} = \boxed{\sqrt[10]{2}_{9°+72k}}$ $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Las cinco raíces son:

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt[10]{2}_{9°} \\ z_1 = \sqrt[10]{2}_{81°} \\ z_2 = \sqrt[10]{2}_{153°} \\ z_3 = \sqrt[10]{2}_{225°} \\ z_4 = \sqrt[10]{2}_{297°} \end{cases}$$





Averiguo el apotema por el Teorema del Seno:

$$\frac{\sqrt[10]{2}}{sen\,90°} = \frac{ap}{sen\,54°} \Rightarrow$$

$$\boxed{ap = sen\,54° \cdot \sqrt[10]{2}}$$

Averiguo ℓ también por el Teorema del Seno:

$$\frac{\sqrt[10]{2}}{sen\,90°} = \frac{\ell/2}{sen\,36°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{2} = sen\,36° \cdot \sqrt[10]{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = 2 \cdot sen\,36° \cdot \sqrt[10]{2}}$$

$\rightarrow$ Perímetro del pentágono $= 5 \cdot \ell \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot 2 \cdot sen\,36° \cdot \sqrt[10]{2} = \boxed{10 \cdot sen\,36° \cdot \sqrt[10]{2}}$

Área del pentágono $= \frac{P \cdot ap}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{10 \cdot sen\,36° \cdot \sqrt[10]{2} \cdot sen\,54° \cdot \sqrt[10]{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{10 \cdot sen\,36° \cdot sen\,54° \cdot (2^{1/10})^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{5 \cdot sen\,36° \cdot sen\,54° \cdot 2^{1/5}\ m^2}$$

O en decimales: $\boxed{2'731192639\ m^2}$

(Suponiendo m, como unidad de medida).