EXAMEN 2021/2022 TEMA 6 y 7

SOLUCIÓN

1.

a) Falso, ya que eso dos números a y b no tienen que ser necesariamente irracionales siempre que $a, b \in \mathbb{R}$. Esa es la condición. Por tanto:

$\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ $\Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R} // \vec{u} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{u}$.

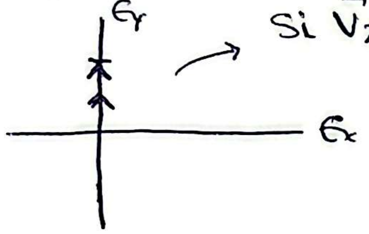
b) Sea $\left.\begin{matrix}\vec{v} = (0, v_2) \\ \vec{u} = (0, u_2)\end{matrix}\right\} |\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u}| = 4 \Rightarrow$ ¿$\alpha = 30$?

$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow (0, v_2) \cdot (0, u_2) = 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha =$

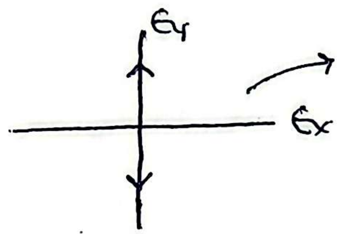
$= v_2 + u_2 = 12 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{v_2 + u_2}{12}\right)$.

No hace falta calcular $v_2$ y $u_2$, ya que si $\vec{v} = (0, v_2)$ y $\vec{u} = (0, u_2)$, gráficamente se representaría:

Si $\vec{v_2}$ y $\vec{u_2} > 0$ ó $< 0$ (ambos), $\boxed{\alpha = 0°}$.



Si $\vec{v_2} < 0$ y $\vec{u_2} > 0$ ó $\vec{v_2} > 0$ y $\vec{u_2} < 0$, $\boxed{\alpha = 180°}$



→ Por tanto, la afirmación es FALSA, ya que solo pueden formar ángulos de 0° o de 180°.

c) $\left.\begin{matrix}\vec{u} = (6, k) \\ \vec{v} = (-1, 3)\end{matrix}\right\} \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow$ ¿$k = 1$?

$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (6, k) \cdot (-1, 3) = 0 \Rightarrow -6 + 3k = 0 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

→ FALSO, $k \neq 1$, $k = 2$.

d) $\left.\begin{matrix}B = \left\{(1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{7}\right)\right\} \\ \vec{w} = (12, -3)\end{matrix}\right\}$ ¿$\vec{w}_B = (5, 14)$?

$(12, -3) = \alpha \cdot (1, -1) + \beta \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} 12 = \alpha + \frac{1}{2}\beta \\ -3 = -\alpha + \frac{1}{7}\beta \end{cases}$

$9 = \frac{9}{14}\beta \Rightarrow \boxed{\beta} = \frac{9}{1} : \frac{9}{14} = \boxed{14}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha} = 12 - \frac{1}{2} \cdot \beta = 12 - \frac{1}{2} \cdot 14 = \boxed{5}$. $\Rightarrow \boxed{\vec{w}_B = (5, 14)}$

→ Por tanto, el enunciado es VERDADERO.

② . Dadas los puntos: $A(0,6)$ ; $B(1,-1)$

Y las rectas:

$r: x-3y+6=0$

$s: \frac{2x-2}{6} = \frac{3y+3}{3} \Rightarrow s: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1}$

$h: \begin{cases} x = 3 - \frac{2}{3}t \\ y = 6 \end{cases}$

a) ¿Pasa alguna recta por el punto A? ¿Y por el punto B?

Para comprobarlo, sustituimos A y B en cada una de las ecuaciones.

* PUNTO Ⓐ: $A(0,6)$

$r: 0-3\cdot 6+6=0 \Rightarrow -18+6=0 \Rightarrow -12 \neq 0.$

$s: \frac{0-1}{3} = \frac{6+1}{1} \Rightarrow \frac{-1}{3} \neq 7.$

$h: \begin{cases} 0 = 3-\frac{2}{3}t \Rightarrow \text{(t puede tomar cualquier valor)}. ✓. \\ y=6 \end{cases}$

↳ Por el punto A, pasa la recta h.

* PUNTO Ⓑ: $(1,-1)$

$r: 1-3(-1)+6=0 \Rightarrow 1+3+6 \neq 0.$

$s: \frac{1-1}{3} = \frac{-1+1}{1} \Rightarrow \frac{0}{3} = \frac{0}{1} \Rightarrow 0=0.$ ✓.

h: NO, ya que $y=-1 \neq 6$.

↳ Por el punto B, pasa la recta s.

b) Hallar un punto, un vector director y un vector normal de cada recta.

→ $\boxed{\text{RECTA } r}$ $r: x-3y+6$

$\boxed{x=0} \rightarrow 0-3y+6=0 \Rightarrow -3y=-6 \Rightarrow \boxed{y=2} \rightarrow \boxed{P(0,2)}$ ✓. (PUNTO)

$\boxed{\vec{n}=(1,-3)}$ (NORMAL) ✓. $\Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = (3,1)}$ (VECTOR) ✓.

→ $\boxed{\text{RECTA } s}$ $s: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1}$

$\boxed{x=1} \rightarrow \frac{0}{3} = y+1 \Rightarrow \boxed{y=-1} \rightarrow \boxed{P(1,-1)}$ ✓. (PUNTO)

$\boxed{\vec{v}_s = (3,1)}$ (VECTOR) ✓. $\Rightarrow \boxed{\vec{n}=(-1,3)}$ (NORMAL) ✓.

→ $\boxed{\text{RECTA } H}$ $h: \begin{cases} x = 3 - \frac{2}{3}t \\ y = 6+0t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_h = (-2/3, 0)}$ (VECTOR) ✓. $\Rightarrow \boxed{\vec{n} = (0, 2/3)}$ (NORMAL) ✓.

↳ $\boxed{P(3,6)}$ (PUNTO) ✓.

c) Hallar la ecuación explícita de cada recta, e indica cuál es la pendiente de cada una.

$r: x-3y+6=0 \Rightarrow r: -3y=-x-6 \Rightarrow \boxed{r: y=\frac{1}{3}x+2}$

Ecuación explícita ($m=1/3$).

$s: \frac{x-1}{3}=y+1 \Rightarrow x-1=3y+3 \Rightarrow 3y=x-4 \Rightarrow \boxed{s: y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}}$

Ecuación explícita ($m=1/3$).

$h: \begin{cases} x=3-\frac{2}{3}t \\ y=6+0t \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=6}$ ecuación explícita. ($m=0$).

d) ¿Cuál es la posición relativa de r y s? ¿y la de r y h?

las rectas r y s son paralelas ya que $m_s=m_r$ pero $n_s \neq n_r$.

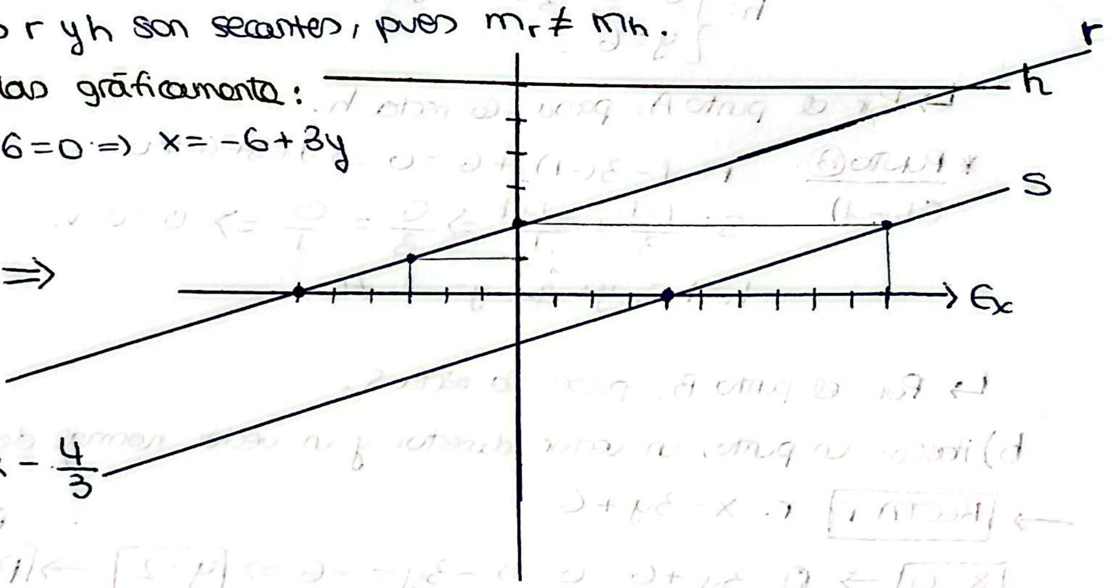
las rectas r y h son secantes, pues $m_r \neq m_h$.

Represéntalas gráficamente:

$r: x-3y+6=0 \Rightarrow x=-6+3y$

| x | y |
|---|---|
| -6 | 0 |
| -3 | 1 |
| 0 | 2 |

$\Rightarrow$




$s: y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

| x | y |
|---|---|
| 4 | 0 |
| 10 | 2 |

¿Qué dos ángulos forman r y h?

$r: y=\frac{1}{3}x+2 \Rightarrow \vec{v_r}=(3,1)$

$h: \begin{cases} x=3-\frac{2}{3}t \\ y=6+0t \end{cases} \Rightarrow \vec{v_h}=(-2/3,0)$

$\vec{v_r}\cdot\vec{v_h}=|\vec{v_r}|\cdot|\vec{v_h}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$ $-2=\sqrt{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\vec{v_r}\cdot\vec{v_h}=(3,1)\cdot(-2/3,0)=\boxed{-2}$ $\Rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{10}\cdot 2/3}\right)$

$|\vec{v_r}|=\sqrt{10}$ $\Rightarrow \boxed{\alpha=161'56505012^\circ}$

$|\vec{v_h}|=2/3$ $\Rightarrow \beta=180-\alpha \Rightarrow \boxed{\beta=18'43494988^\circ}$

e) Hallar la ecuación paramétrica y la implícita de la recta perpendicular a r y que pasa por B.

$r: x - 3y + 6 = 0$
$B(1,-1)$ } Se pide encontrar recta $d \perp r$ y que pase por $B(1,-1)$

$d \perp r \Leftrightarrow \vec{V_d} \perp \vec{V_r} \Rightarrow \vec{V_d} \cdot \vec{V_r} = 0$

$r: x-3y+6=0 \Rightarrow \vec{n} = (\overrightarrow{1,-3}) = \vec{V_d} \Rightarrow \boxed{\vec{V_d} = (\overrightarrow{1,-3})}$

$\Rightarrow d: y = mx+n \Rightarrow d: y = -3x+n \Rightarrow$ Sustituyo $B(1,-1) \Rightarrow -1 = -3+n \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{n=2}$

En conclusión: $\boxed{d: y = -3x+2} \Rightarrow \boxed{d: 3x+y-2=0}$ → (Ec. implícita).

$d: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot \vec{V_1} \\ y = y_0 + t \cdot \vec{V_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-3t \end{cases}}$ (Ec. paramétrica).

f) ¿Qué distancia hay entre las rectas r y s? ¿Y entre el punto B y la recta r?

1º Distancia entre las rectas r y S:

$\boxed{r: x-3y+6=0}$
$s: x-1 = 3y+3 \Rightarrow \boxed{s: x-3y-4=0} \Rightarrow$ Si $\boxed{x=4} \Rightarrow \boxed{y=0}$

$P(4,0)$

→ Así, hallaremos la distancia entre la recta $r: x-3y+6=0$ y el punto $P(4,0)$ $(a,b)$
$r: Ax - By + C = 0$

$$\text{dist}(P,r) = \frac{|A\cdot a + B\cdot b + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{dist}(P,r) = \frac{|1\cdot 4 + (-3)\cdot 0 + 6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\text{dist}(P,r) = 3'16\,u}$$

2º Distancia entre el punto B y la recta r

$r: x-3y+6=0$
$B(1,-1)$

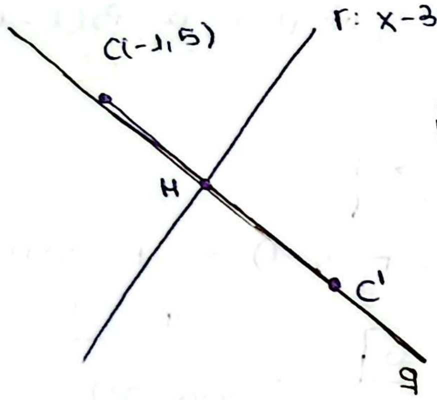
$$\Rightarrow \text{dist}(B,r) = \frac{|A\cdot a + B\cdot b + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|1\cdot 1 + (-3)\cdot(-1) + 6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} =$$

$$\Rightarrow \text{dist}(B,r) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \boxed{3'16\,u}$$

Si las distancias son las mismas, es porque el punto $B \in S$.

$B(1,-1) \Rightarrow S: x-3y-4=0 \Rightarrow$ (Sustituyo) $\Rightarrow 1-3\cdot(-1)-4=0 \Rightarrow \underline{0=0}$ ✓.

g) Dado el punto $C(-1,5)$, ¿cuál es su punto simétrico respecto a la recta r?




$r: x-3y+6=0$

$\Downarrow$

$\vec{n}=(1,-3) \Rightarrow \boxed{\vec{v_g}=(1,-3)}$

Primero, hallamos la recta g que es perpendicular a r.

$g \perp r \Leftrightarrow \vec{v_g} \perp \vec{v_r} \Rightarrow \boxed{\vec{v_g}\cdot\vec{v_r}=0}$

$r: x-3y+6=0 \Rightarrow -3y=-6-x \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}x+2} : r$

$g: y=mx+n \Rightarrow y=-3x+n \Rightarrow C(-1,5)$

$\Rightarrow 5=3+n \Rightarrow \boxed{n=2} \Rightarrow \boxed{g: y=-3x+2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = x+6 \\ (y=-3x+2)(-3) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 3y = x+6 \\ -3y = 9x-6 \end{cases}$$

$0 = 10x \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{H(0,2)}$

$H=\frac{C+C'}{2} \Rightarrow C'=2H-C \Rightarrow C'=2(0,2)-(-1,5) \Rightarrow$

$\Rightarrow C'=(0,4)-(-1,5) \Rightarrow \boxed{C'=(1,-1)}$

es el punto simétrico.

h) ¿Qué valores puede tomar K para que la recta $g: y=Kx+1$ forme 45° con la recta h?

$$h: \begin{cases} x=3-\frac{2}{3}t \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=6} \Rightarrow m=0 \Rightarrow \vec{V_h}=(-2/3,0)=(1,0)=(4,0)=\ldots$$

$\Rightarrow h: y=6 \Rightarrow \vec{V_h}=(1,0)$

$\Rightarrow g: y=Kx+1 \Rightarrow \vec{V_g}=(1,K)$

$\vec{V_h}\cdot\vec{V_g}=|\vec{V_h}|\cdot|\vec{V_g}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,0)(1,K)=1\cdot\sqrt{1+K^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \Rightarrow \frac{2}{4}=\frac{1}{K^2+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2K^2+2=4 \Rightarrow 2K^2=2 \Rightarrow K^2=1 \Rightarrow \boxed{K=\pm 1}$

En conclusión: K debe ser 1 ó -1.