SOLUCIÓN EXAMEN TEMA 6 y 7

2023/2024

1) Un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, si y solo si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de forma que $\vec{v}$ pueda expresarse como $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{w}$.

Formalmente: $\vec{v}$ es comb. lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$ $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,//\, \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$.

Ejemplo: $\overrightarrow{(6,2)}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{(2,0)}$ y $\overrightarrow{(2,2)}$, ya que si $\alpha = 2$; $\beta = 1$:

$\overrightarrow{(6,2)} = 2 \cdot \overrightarrow{(2,0)} + 1 \cdot \overrightarrow{(2,2)} \Rightarrow \overrightarrow{(6,2)} = \overrightarrow{(4,0)} + \overrightarrow{(2,2)} = \overrightarrow{(6,2)}$ ✓.

2) ¿Verdadero o falso?

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{23}) \\ \vec{v} = (0, -3) \end{array}\right\}$ ¿$|\vec{u}| + |\vec{v}| < 9$?

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{23})^2} = \sqrt{25} = \boxed{5} \\ \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \boxed{3} \end{array}\right\}$ $|\vec{u}| + |\vec{v}| = 8 < 9$ ✓.

→ VERDADERO, ya que $8 < 9$.

b) $\left.\begin{array}{l} B\{(\pi, -1), (0,3)\} \\ \vec{w} = \overrightarrow{(2\pi, 4)} \end{array}\right\}$ ¿$\vec{w}_B = (2,2)$?

$\overrightarrow{(2\pi, 4)} = 2 \cdot (\pi, -1) + 2 \cdot (0,3) = (2\pi, -2) + (0,6) = \boxed{\overrightarrow{(2\pi, 4)}}$ ✓.

→ VERDADERO.

c) $\left.\begin{array}{l} P(1,-1) \\ Q(2,-2) \end{array}\right\}$ $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,-2) - (1,-1) = \overrightarrow{(1,3)}$

↓

No es perpendicular a $\overrightarrow{(0,-3)}$

Perpendicular a $\overrightarrow{(1,3)}$ sería $\overrightarrow{(-3,1)}$ ó $\overrightarrow{(3,-1)}$.

→ Por tanto, FALSO.

③ Dada la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \cdot t \\ y = 2 + \sqrt{2} \cdot t \end{cases}$$

a) Escribir todas sus ecuaciones:

Ya nos dan la paramétrica.

<u>EC. VECTORIAL</u>: $r: (x_0, y_0) + (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \cdot t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r: (1,2) + (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cdot t}$$

EC. VECTORIAL

Para obtener la <u>EC. CONTINUA</u>, despejo t de la ec. paramétrica e igualo.

$$r: \begin{cases} -\sqrt{2}t = x-1 \\ \sqrt{2}t = y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-1}{-\sqrt{2}} \\ t = \dfrac{y-2}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{-\sqrt{2}} = \frac{y-2}{\sqrt{2}}} : r$$

EC. CONTINUA

Multiplico en cruz y obtengo la implícita y despejo la y para hallar la explícita.

$$\sqrt{2}x - \sqrt{2} = -\sqrt{2} \cdot y + 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y - 3\sqrt{2} = 0} : r$$

EC. IMPLÍCITA $\rightarrow \boxed{x + y - 3 = 0}$

$$\sqrt{2} \cdot y = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{r: y = -x + 3}$$

EXPLÍCITA

b) Razona si los puntos P(1,0) y Q(1,2) pertenecen o no a la recta r.

$r: y = -x+3 \Rightarrow P(1,0) \Rightarrow 0 = -1+3 \Rightarrow 0 \neq 2 \rightarrow$ <u>NO</u>.

$r: y = -x+3 \Rightarrow P(1,2) \Rightarrow 2 = -1+3 \Rightarrow 2 = 2 \rightarrow$ <u>sí</u>.

<u>Conclusión</u>: El punto Q sí pertenece a la recta r, el P no.

④ Sea el vector normal $\vec{n}(-3,1)$ de una recta s. Halla la ec. explícita de cada recta r que cumpla:

a) r pasa por (1,1) y es paralela a s.

$\vec{n}=(-3,1) \Rightarrow s: -3x+y+C=0 \Rightarrow \vec{V_r}=(1,3) \Rightarrow \boxed{s: y=3x+n}$

r//s ⇒ si sus vectores son iguales o proporcionales.

$\vec{V_s}=(1,3)=\vec{V_r} \Rightarrow r: y=3x+n \Rightarrow P(1,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1=3\cdot 1+n \Rightarrow \boxed{n=-2}$

$\Rightarrow \boxed{r: y=3x-2}$

b) r es de la forma

$r: 3x+ky-8=0 \Rightarrow \vec{n}=(3,k) \Rightarrow \vec{V_r}=(-k,3)$

con $k \in \mathbb{R}$. De forma que $r \perp s$.

$r \perp s \Leftrightarrow \vec{V_r} \perp \vec{V_s} \Rightarrow \vec{V_s}\cdot\vec{V_r}=0.$

$(1,3)\cdot(-k,3)=0 \Rightarrow -k+9=0 \Rightarrow \boxed{k=9}$

$r: 3x+9y-8=0 \Rightarrow 9y=-3x+8 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{9}: r}$

⑤ Dada la recta

$r: y=-x+1$, responde:

a) Halla los cuatro ángulos que forma r con la recta $s: y=-2x+1$

$r: y=-x+1 \Rightarrow \vec{V_r}=(-1,1)$
$s: y=-2x+2 \Rightarrow \vec{V_s}=(1,-2)$
$\Big\} \vec{V_s}\cdot\vec{V_r}=|\vec{V_s}|\cdot|\vec{V_r}|\cdot\cos\alpha$

$\underbrace{(-1,1)\cdot(1,-2)}_{=-3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\alpha=161'5650512^\circ}$

$\beta=\frac{360-2\alpha}{2}=180-\alpha \Rightarrow \boxed{\beta=18'4349488^\circ}$

(α está 2 veces y β otras 2 = 4 ángulos).

d) Halla la distancia entre la recta r y la recta $h: y=-x+4$.

$r: y=-x+1 \Rightarrow \vec{v_r} = (\overrightarrow{-1,1})$

$s: h: y=-x+4 \Rightarrow \vec{v_s} = (\overrightarrow{-1,1})$

} Como los vectores son iguales, son PARALELAS.

↳ $s: y=-x+4 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{y=4}$ $P(0,4)$

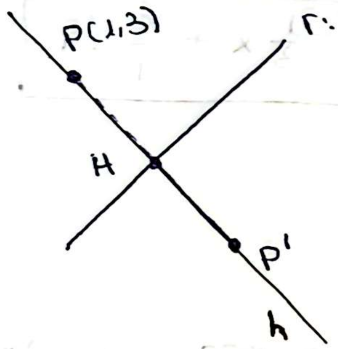
Así, hallo la distancia entre el punto $P \in s \Rightarrow P(0,4)$ y la recta r.

$r: y=-x+1 \Rightarrow x+y-1=0$

$P(0,4)$

$$\text{dist}(P,r) = \frac{|A\cdot a + B\cdot b + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 4 + (-1)|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \boxed{2'12\ u}$$

c) ¿Cuál es el punto simétrico de $P(1,3)$ respecto r?



$r: y=-x+1 \Rightarrow \vec{v_r} = (\overrightarrow{-1,1})$

Primero, hallamos la recta $h \perp r$ que pasa por $P(1,3)$

$h \perp r \iff \vec{v_h} \perp \vec{v_r} \Rightarrow \vec{v_h}\cdot\vec{v_r} = 0$

$\vec{v_r} = (\overrightarrow{-1,1}) \Rightarrow \vec{v_h} = (\overrightarrow{1,1})$

$h: y=mx+n \Rightarrow y = x+n \Rightarrow P(1,3)$ (sustituyo)

$\Rightarrow 3 = 1+n \rightarrow \boxed{n=2}$

$\Rightarrow \boxed{h: y = x+2}$

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y = x+2 \end{cases}$$

$2y = 3 \Rightarrow \boxed{y=3/2} \Rightarrow x = y-2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3-4}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{H\left(-1/2,\ 3/2\right)}$

$P' = 2H - P \Rightarrow P' = 2\cdot(-1/2, 3/2) - (1,3) \Rightarrow P' = (-1,3) - (1,3)$

$\Rightarrow \boxed{P' = (-2,0)}$