PREPARAMATES.COM

Preparación para oposiciones de profesor de Matemáticas en Andalucía

RETO 1 - Noviembre

(Espacios Vectoriales, Matrices, Determinantes y discusión de sistemas)

La Rioja 2025

Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, $p(x) = ax^2 + bx + c$ y sea f la aplicación bilineal:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$$

$$(p_1, p_2) \mapsto f(p_1, p_2) = \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x) dx$$

a) Dada la base $B = \{1, x, x^2\}$, halle la matriz G que caracteriza a la aplicación f en dicha base.

b) Demuestre que la aplicación es definida positiva.

c) Dados los polinomios $p(x) = 3x^2 + 1$, $q(x) = 2x + 1$, calcule $\int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ sin realizar para ellos la integración.

Solución

a) Para hallar la matriz de f aplicaremos f a cada par de elementos elegibles de la base B, es decir, deberemos calcular: $f(1,1), f(1,x), f(1,x^2), f(x,1), f(x,x)$, $f(x,x^2), f(x^2,1), f(x^2,x), f(x^2,x^2)$:

$$f(1,1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = 1$$

$$f(1,x) = \int_0^1 1 \cdot x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$f(1,x^2) = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$f(x,1) = f(1,x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x,x) = \int_0^1 x \cdot x dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$f(x,x^2) = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$f(x^2,1) = f(1,x^2) = \frac{1}{3}$$
$$f(x^2,x) = f(x,x^2) = \frac{1}{4}$$
$$f(x^2,x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

Quedando por tanto así la matriz de f:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Aclaración sobre qué significaría esta matriz:

Si tenemos dos polinomios:

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; \qquad p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

aplicar f a ambos equivaldría a lo siguiente:

$$f\left(p_1(x), p_2(x)\right) = f\left((a_0,a_1,a_2),(b_0,b_1,b_2)\right) = (a_0,a_1,a_2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

b) Por definición, una **forma bilineal es definida positiva** si para todo vector $\vec{u} \neq 0$ del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se tiene que

$$f(\vec{u},\vec{u}) > 0$$

Comprobémoslo:

Sea $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ / $p(x) \neq 0$ y $p(x) = a + bx + cx^2$, sea $\vec{u} = (a,b,c)$ el vector que representa sus coordenadas en la base canónica. Calculamos $f(\vec{u},\vec{u})$:

$$f(\vec{u},\vec{u}) = \int_0^1 p(x)^2 dx = \int_0^1 (a+bx+cx^2)^2 dx$$

Siendo lo anterior mayor que 0, porque $p(x)^2 > 0$. Por lo tanto, es una forma bilineal definida positiva.

c) Para este apartado, simplemente vemos que las coordenadas de los polinomios que nos da el enunciado son: $p_1 = (1,0,3)$ y $p_2 = (1,2,0)$. Luego, lo que nos piden es aplicar f a ambos, es decir:

$$f\left(p_1, p_2\right) = f\left((1,0,3),(1,2,0)\right) = (1,0,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

RETO 2 - Diciembre

(Números enteros y congruencias)

Valencia 2025

a) Demuestre que si a es un número natural no nulo y $n > 1$, el número dado por
$$A_{a_n} = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)^2 - a^n$$
no es nunca un número primo.

b) Demuestre que si $B_n = 2^n - 1$ es un número primo, también lo es el número n, siendo n un número natural.

c) Demuestre que para cualquier número natural n, el número
$$C_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$$
es múltiplo de 169.

Solución

a) Tengamos en cuenta dos casos:

- Si $a = 1$, tenemos un caso trivial, dado que la suma de A_{a_n} resultaría:
$$A_{a_n} = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$$
que es compuesto.
- Si $a \neq 1$, como es una progresión geométrica la suma resulta:
$$A_{a_n} = \frac{(a^{n+1}-1)^2}{(a-1)^2} - a^n = \frac{a^{2n-2} - 2a^{n+1} + 1 - a^n(a-1)^2}{(a-1)^2} =$$
$$= \frac{a^{2n+2} + 1 - a^{n+2} - a^n}{(a-1)^2} = \frac{(a^{n+2}-1)}{a-1} \cdot \frac{(a^n - 1)}{a-1}$$
Como las dos expresiones de los numeradores tienen como raíz 1, ambas son divisibles por $(a-1)$, pudiéndose expresar como descomposición en producto dos factores (ya que $n > 1$ y $a \neq 1$), es decir, es un número compuesto.
$$A_{a_n} = \frac{(a^{n+2}-1)}{a-1} \cdot \frac{(a^n-1)}{a-1} =$$
$$(a^{n+1} + a^n + \cdots + a + 1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$

b) Vamos a aplicar **reducción al absurdo**: si n no fuera primo, existirían $p, q \in \mathbb{N}$ mayores que 1 tales que $n = p \cdot q$. Sustituyendo

$$B_n = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1$$

y como todo polinomio de la forma $x^q - 1$ tiene el factor $x - 1$, se puede expresar

$$x^q - 1 = (x-1)(x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + x + 1)$$

por tanto:

$$B_n = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)\left((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \cdots + 2^p + 1\right)$$

y resulta una descomposición de B_n en un producto de dos números mayores que 1, por tanto B_n no puede ser un número primo, entrando en contradicción con el enunciado, y quedando demostrada la veracidad del enunciado.

c) Vamos a demostrar el enunciado por **inducción**:

Siendo $C_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$:

- Si $n = 1$, tenemos

$$C_1 = 3^6 - 26 - 27 = 676 = 169 \cdot 4$$

  Por tanto C_1 es múltiplo de 169.

- Suponiendo que es cierto para n, tenemos la hipótesis de inducción:

$$[H.I]: \quad \exists k \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ C_n = 169 \cdot k$$

  es decir:

$$3^{3n+3} - 26n - 27 = 169k \iff 3^{3n+3} = 26n + 27 + 169k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

  Demostremos que es cierto para $n+1$:

$$C_{n+1} = 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 = 3^3 3^{3n+3} - 26(n+1) - 27 =^{[H.I]}$$

$$= 27(26n + 27 + 169k) - 26n - 53 = 26 \cdot 26n + 27^2 - 53 + 27 \cdot 169k =$$

$$= 169(4n + 169 \cdot 4 + 27k)$$

  Por tanto es múltiplo para $n+1$, quedando demostrado por inducción la veracidad del enunciado.

RETO 3 - Enero

(Números complejos)

Extremadura (Modelo A) 2025

Dada la ecuación $z^2 - 8iz - (19 - 4i) = 0$, cuyas raíces son z_1 y z_2, hallar los números complejos z_3 tales que los afijos de z_1, z_2 y z_3 formen un triángulo rectángulo isósceles en el que el vértice del ángulo recto sea el afijo de la raíz de mayor componente imaginaria.

Solución

1. Reescritura de la ecuación y cálculo del discriminante. Escribimos la ecuación en la forma estándar $z^2 + bz + c = 0$. Aquí

$$b = -8i, \qquad c = -(19 - 4i) = -19 + 4i.$$

El discriminante complejo es

$$\Delta = b^2 - 4c = (-8i)^2 - 4(-19 + 4i) = -64 + 76 - 16i = 12 - 16i.$$

Con esto, las raíces se obtienen por la fórmula

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{12 - 16i}}{2}.$$

2. Cálculo de $\sqrt{\Delta}$. Buscamos números reales u, v tales que $(u + iv)^2 = 12 - 16i$. Expandiendo:

$$(u + iv)^2 = u^2 - v^2 + 2uv\,i.$$

Igualamos parte real e imaginaria:

$$u^2 - v^2 = 12, \qquad 2uv = -16 \quad \Rightarrow \quad uv = -8.$$

De $uv = -8$ despejamos $v = -8/u$ (con $u \neq 0$) y sustituimos:

$$u^2 - \left(\frac{-8}{u}\right)^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad u^2 - \frac{64}{u^2} = 12.$$

Multiplicando por u^2:

$$u^4 - 12u^2 - 64 = 0.$$

Sea $X = u^2$. Resolvemos $X^2 - 12X - 64 = 0$. Las soluciones son

$$X = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 256}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{12 \pm 20}{2}.$$

Así $X = 16$ o $X = -4$. Descartamos $X = -4$ porque $u^2 \geq 0$. Entonces $u^2 = 16$ y $u = \pm 4$.
Si $u = 4$, entonces $v = -8/u = -2$. Si $u = -4$, entonces $v = 2$. Por tanto las dos raíces cuadradas de Δ son

$$\sqrt{\Delta} = \pm(4 - 2i).$$

(Esto significa que al aplicar la fórmula de las raíces obtendremos las dos soluciones correspondientes.)

3. Cálculo de z_1 y z_2. Sustituimos en la fórmula:

$$z = \frac{8i \pm (4 - 2i)}{2}.$$

Calculamos las dos posibilidades por separado.

- Con el signo $+$:

$$z_1 = \frac{8i + (4 - 2i)}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i.$$

- Con el signo $-$:

$$z_2 = \frac{8i - (4 - 2i)}{2} = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i.$$

Comparando las partes imaginarias, $Im(z_1) = 3$ e $Im(z_2) = 5$. La mayor componente imaginaria corresponde a z_2. Por tanto, el vértice del ángulo recto del triángulo debe ser el punto afín $z_2 = -2 + 5i$.

4. Interpretación geométrica y condición sobre z_3. En el plano complejo, el vector que une z_2 con z_1 es

$$\vec{v} = z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (-2 + 5i) = 4 - 2i.$$

Queremos que los puntos z_1, z_2, z_3 formen un triángulo rectángulo isósceles con el ángulo recto en z_2. Eso significa:

I. El segmento $z_2 z_3$ debe tener la misma longitud que $z_2 z_1$: $|z_3 - z_2| = |z_1 - z_2| = |\vec{v}|$.

II. El vector $z_3 - z_2$ debe ser perpendicular a $\vec{v}$.

En el plano complejo, rotar un vector 90° se consigue multiplicando por i (rotación antihoraria) o por $-i$ (rotación horaria). Además, la multiplicación por i o $-i$ conserva la norma. Por tanto las dos posibilidades para $\vec{w} = z_3 - z_2$ son

$$\vec{w} = i\,\vec{v} \quad \text{o} \quad \vec{w} = -i\,\vec{v}.$$

De aquí

$$z_3 = z_2 \pm i\,(z_1 - z_2).$$

5. Cálculo explícito de z_3. Ya tenemos $\vec{v} = 4 - 2i$. Multiplicamos por i y por $-i$:

$$i\,\vec{v} = i(4-2i) = 4i - 2i^2 = 4i + 2 = 2 + 4i,$$

$$-i\,\vec{v} = -2 - 4i.$$

Entonces las dos soluciones son

$$z_3^{(1)} = z_2 + i\,\vec{v} = (-2+5i) + (2+4i) = 0 + 9i = 9i,$$

$$z_3^{(2)} = z_2 - i\,\vec{v} = (-2+5i) + (-2-4i) = -4 + i.$$

Paso 6. Verificación.
Perpendicularidad: dos vectores u y w en $\mathbb{C}$ son ortogonales si y sólo si la parte real de $u\overline{w}$ es 0 (esto coincide con el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^2$). Tomemos $u = \vec{v} = 4 - 2i$ y $w = i\,\vec{v} = 2 + 4i$. Calculamos

$$u\overline{w} = (4-2i)(2-4i) = 8 - 16i - 4i + 8i^2 = 8 - 20i - 8 = -20i,$$

cuya parte real es 0, por tanto son perpendiculares. La misma comprobación funciona con $-i\,\vec{v}$.
Igualdad de longitudes:

$$|z_1 - z_2| = |4-2i| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20},$$

$$|z_3^{(1)} - z_2| = |2+4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20},$$

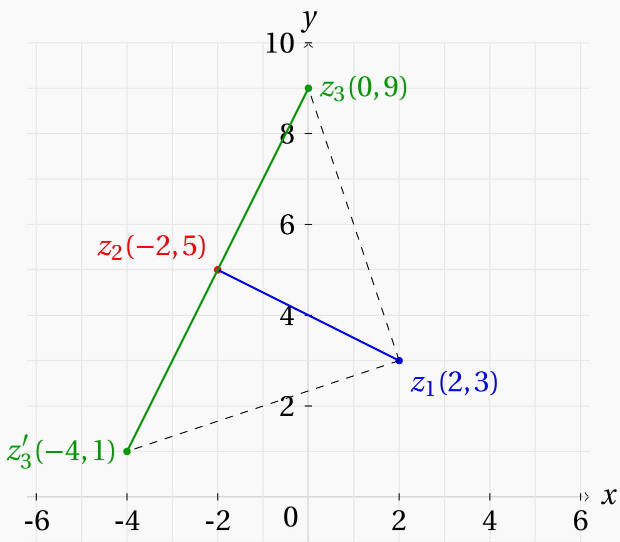
$$|z_3^{(2)} - z_2| = |-2-4i| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}.$$

Ambas distancias coinciden con $|z_1 - z_2|$. Luego cada $z_3^{(k)}$ produce un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en z_2.

Conclusión: Los números complejos z_3 buscados son

$$\boxed{z_3 = 9i \quad \text{o} \quad z_3 = -4 + i.}$$

Gráficamente:


y
10
8
6
4
2
x
-6
-4
-2
0
2
4
6
$z_3(0,9)$
$z_2(-2,5)$
$z_1(2,3)$
$z_3'(-4,1)$

RETO 4 - Febrero

(Sucesiones)

Extremadura (Modelo B) 2025

Halle los siguientes límites:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{7^n} \quad \text{donde } a_n \text{ viene dado por } \begin{cases} a_n = 7a_{n-1} + 4, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \left(e^x - \tfrac{x}{7}\right)^{1/x}$$

Solución

a) Queremos hallar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{7^n}, \qquad a_n = 7a_{n-1} + 4,\ a_1 = 3.$$

Definimos la sucesión auxiliar

$$b_n = \frac{a_n}{7^n}.$$

Sustituimos en la recurrencia:

$$b_n = \frac{a_n}{7^n} = \frac{7a_{n-1} + 4}{7^n} = \frac{a_{n-1}}{7^{n-1}} + \frac{4}{7^n} = b_{n-1} + \frac{4}{7^n}.$$

Expresamos b_n como la suma:

$$b_n = b_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{4}{7^k}, \qquad b_1 = \frac{3}{7}.$$

Ahora, para calcular el límite infinito de b_n, debemos calcular la serie geométrica infinita:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{7^k} = 4 \cdot \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{4}{49} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{21}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{7} + \frac{2}{21} = \frac{11}{21}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{7^n} = \frac{11}{21}}$$

b) Queremos evaluar
$$\lim_{x\to 0}\left(e^x - \frac{x}{7}\right)^{1/x}.$$
Observamos que resulta la indeterminación 1^∞, por tanto usaremos ahora la fórmula clásica:
$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\,(f(x)-1)}$$
En nuestro caso:
$$f(x) = e^x - \frac{x}{7}, \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$
Aplicamos la fórmula:
$$\lim_{x\to 0}\left(e^x - \frac{x}{7}\right)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{x}{7} - 1}{x}}.$$
El exponente es un límite $0/0$, así que aplicamos L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{x}{7} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{7}}{1} = e^0 - \frac{1}{7} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$
Sustituimos en la expresión final:
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(e^x - \frac{x}{7}\right)^{1/x} = e^{6/7}}$$

RETO 5 - Febrero

(Series)

Castilla y León 2025

Sea la suma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

a) Calcule x para que sea convergente.

b) Calcule la suma.

Solución

a) Sea

$$a_n = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Vamos a aplicar el **criterio de D'Alembert** para estudiar la convergencia de la serie en función de los valores $x \in \mathbb{R}$, y para ello calculamos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = |x|$$

Por tanto, teniendo en cuenta el criterio mencionado, la serie converge si $L < 1$, es decir si

$$|x| < 1 \iff \boxed{-1 < x < 1}$$

Para que la serie diverja:

$$\boxed{x \in (-\infty, -1) \cap (1, \infty)}$$

Tenemos que estudiar ahora los puntos extremos $x = 1$ y $x = -1$:

- Caso $x = 1$. La serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

La cual es una serie telescópica y podemos separar en fracciones simples:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

$$\Longrightarrow A(n+1)+Bn=1 \Longrightarrow \begin{cases} \text{si} \quad n=0 \quad \Longrightarrow \quad A=1 \\ \text{si} \quad n=-1 \quad \Longrightarrow \quad B=-1 \end{cases}$$

Por tanto, si hacemos la suma de manera finita hasta un término N:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1}$$

Tomando límite obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1$$

La serie por tanto converge y además su valor es 1.

- Caso $x=-1$. La serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

Para esta serie alternada podemos aplicar el **criterio de Leibnitz**. Denotando

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Tenemos que, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$ converge porque:

- $b_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y es una sucesión decreciente porque:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $\lim b_n = 0$.

Por tanto la serie converge en $x=-1$ y concluyendo:

$$\boxed{\text{si} \quad x \in [-1,1] \Longrightarrow \text{converge, y en caso contrario diverge}}$$

b) En el apartado anterior, dimos la suma para el caso particular $x=1$ que resultaba ser 1. Veamos cuanto suma de manera general. Denotando $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Al ser convergente en $[-1,1]$, y a su vez $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ es derivable en dicho intervalo, entonces podemos derivar $S(x)$ término a término, incluso una segunda vez:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \implies S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

Esta última, es una **progresión geométrica** de primer término 1 y razón x, cuya suma infinita viene dada por:

$$S''(x) = \frac{1}{1-x}$$

Por tanto, si integramos ahora esta expresión dos veces:

$$S'(x) = \int S''(x)dx = \int \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) + C \implies S(x) = \int S'(x) =$$

$$= \int (-\ln(1-x)+C)dx = \int -(\ln(1-x))dx + \int C dx = \left\{ \begin{matrix} u = -\ln(1-x) & du = \frac{1}{1-x}dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right\}$$

$$= \boxed{(1-x)\cdot\ln(1-x) - 1 + x + Cx + D}$$

Ahora bien, podemos observar que $S(0) = 0$, lo cual nos da una condición inicial para calcular D:

$$S(0) = \ln 1 - 1 + 0 + 0\cdot C + D = -1 + D = 0 \implies \boxed{D = 1}$$

De la misma manera, otra condición es $S'(0) = 0$, luego:

$$S'(0) = -\ln 1 + C = 0 \implies \boxed{C = 0}$$

Conclusión: la expresión pedida es

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\cdot\ln(1-x) + x}$$