Examen Tema 5: Números Complejos

RESOLUCIÓN 2025/26

1.

a) <u>Para $z = 1+i$</u>

- <u>Módulo</u>: $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
- <u>Argumento</u>: $tg(\alpha) = \frac{1}{1} \Rightarrow \alpha = 45°$

$$\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{2} \\ \alpha = 45° \end{array}\right\} \boxed{z = (\sqrt{2})_{45°}} \quad //$$

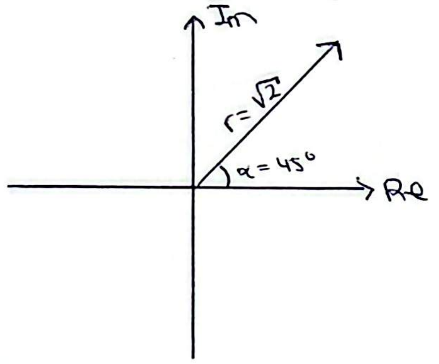
<u>Para $w = -1+i$</u>

- <u>Módulo</u>: $r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.
- <u>Argumento</u>: $tg(\beta) = \frac{1}{-1} \Rightarrow \beta = 135°$

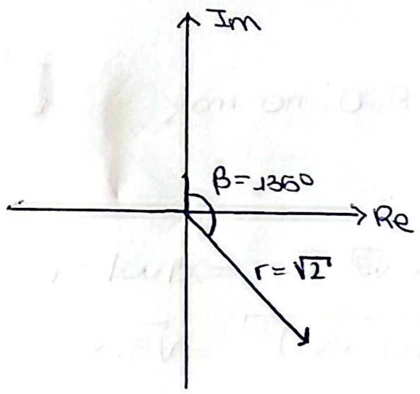
$$\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{2} \\ \beta = 135° \end{array}\right\} \boxed{w = (\sqrt{2})_{135°}} \quad //$$

b) Representación en el plano de Argand:

$z = (\sqrt{2})_{45°} = r_\alpha$



$w = (\sqrt{2})_{135°} = r_\beta$.



c) Calcule:

$$z' = \frac{z^6 \cdot w^{10}}{(256)_{180°}}$$

$$z^6 = (\sqrt{2}_{45°})^6 = 8_{270°}.$$

$$w^{10} = (\sqrt{2}_{135°})^{10} = (\sqrt{2})^{10}_{1350°} = 32_{270°}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{8_{270°} \cdot 32_{270°}}{(256)_{180°}} = \frac{256_{180°}}{256_{180°}} = \boxed{1_{0°}} \quad //$$

d) Forma binómica $\Rightarrow z' = 1_{0°} = \underline{\underline{1+0i}}$ ✓.

CS CamScanner

②

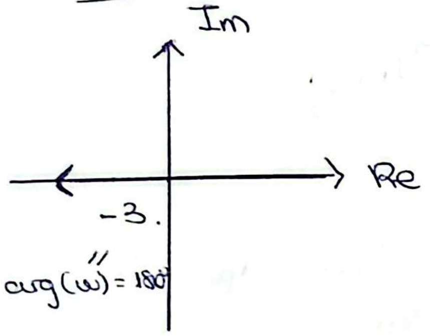
a) Un número real se puede expresar en forma binómica:

$\Rightarrow$ VERDADERO.

Basta con que la parte imaginaria sea 0. $(a+0i)$.
Por ej. $5 = 5+0i$ ✓.

b) Si $\arg(z) = \alpha = \pi$, al dividirlo por $w = -3$, su nuevo arg. será mayor que 0.

$\pi = 180°$



Como $\arg(z) = \arg(w) = 180°$ y al dividir los argumentos se restan:
$180° - 180° = 0°$. ✓

$\Rightarrow$ FALSO. Es 0°, no mayor que 0.

c)

$w = \sqrt{3} + \sqrt{2}\cdot i \Rightarrow ¿|w| = r = \sqrt{5}$?

$|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$. ✓.

$\Rightarrow$ VERDADERO.

d) Dada la ecuación $z^2 + az + 4 = 0$, no existe un valor de a para que solo tenga soluciones imaginarias puras.

Para que las soluciones sean imaginarias puras, no debe haber término en z (es decir, $a=0$), quedando $z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm 2i$.

$\Rightarrow$ FALSO, ya que SÍ EXISTE un valor de a.

CS CamScanner

3) Resuelve:

a) $iz^4 - 27z = 0 \Rightarrow z(iz^3 - 27) = 0$ → $\boxed{z=0}$ ✓

→ $iz^3 - 27 = 0 \Rightarrow iz^3 = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^3 = \frac{27}{i} = -27i = 27_{270°}$.

• $z_2 = 3_{90°} = 3i$ ✓

• $z_3 = 3_{210°} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$. ✓

• $z_4 = 3_{330°} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ✓

b) $\begin{cases} \left(z + \frac{4}{5}w = \frac{11}{5}i\right) \cdot 5 \\ (3z - 2w = 11i) \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z + \cancel{4w} = 11i \\ 6z - \cancel{4w} = 22i \end{cases}$

$11z = 33i \Rightarrow \boxed{z = 3i}$ //

$3 \cdot (3i) - 2w = 11i \Rightarrow 9i - 2w = 11i \Rightarrow -2w = 2i \Rightarrow \boxed{w = -i}$ //

4) Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar:

$z = \sqrt[4]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \Rightarrow$ Pasamos a polar: r_α.

$|z| = r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

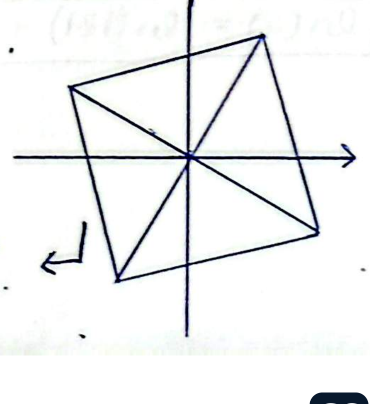
$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}\right) = \text{arctg}(\sqrt{3}) = 240$.

Entonces, $z = 1_{240°}$.

$\Rightarrow \sqrt[4]{1_{240°}} = 1_{\frac{240° + 360K}{4}}$; $K = 0, 1, 2, 3$.

Raíces: $1_{60°}$, $1_{150°}$, $1_{240°}$, $1_{330°}$.

Representación gráfica:



✓ Cuadrado regular.

⑤ EXTRA

a) Demuestra la identidad de Euler: $e^{i\pi}+1=0$.

Partimos de la fórmula de Euler: $e^{i\cdot\alpha}=\cos\alpha+i\cdot\operatorname{sen}\alpha$

Sustituimos $\alpha=\pi$.

$e^{i\cdot\pi}=\cos\pi+i\cdot\operatorname{sen}\pi \Rightarrow e^{i\cdot\pi}=-1 \Rightarrow$ Paso el -1 sumando.

$\Rightarrow \boxed{e^{i\cdot\pi}+1=0}$ ✓.

□ q.e.d.

b) Demuestra la forma exponencial: $z=|z|e^{i\cdot\arg(z)}$.

Todo número complejo z puede expresarse en su forma trigonométrica.

$z=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ $\left\{ \text{donde } \begin{array}{l} r=|z| \text{ (módulo)}. \\ \alpha=\arg(z). \end{array} \right.$

Aplicamos la fórmula de Euler a lo anterior
$(e^{i\cdot\alpha}=\cos\alpha+i\cdot\operatorname{sen}\alpha)$

Sustituimos la parte trigonométrica por la exponencial:

$z=r\cdot e^{i\cdot\alpha} \Rightarrow \boxed{z=|z|\cdot e^{i\cdot\arg(z)}}$ ✓ □ q.ed.

Reemplazo
$r=|z|$.
$\alpha=\arg(z)$.

c) Demuestra la expresión logarítmica: $\ln(z)=\ln(|z|)+i\cdot\alpha$.

Partiendo de la forma exponencial demostrada en el apartado anterior $(z=|z|e^{i\alpha})$.

Aplicamos ln a ambos lados $\Rightarrow \ln(z)=\ln(|z|e^{i\alpha})$.

Usamos la propiedad del logaritmo de un producto: $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$.

$\Rightarrow \ln(z)=\ln(|z|)+\underbrace{\ln(e^{i\alpha})}_{\ln e^{i\alpha}=i\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\ln(z)=\ln(|z|)+i\cdot\alpha}$ ✓.

□ q.ed.