Examen Tema 6 y 7

—— RESOLUCIÓN 2025/26 ——

1.

a) $\vec{u} = (3,-1) \perp \vec{v} = (1,3)$ ✓. $\Rightarrow$ Su producto escalar es 0.

$1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 = 3 - 3 = 0$. ✓

PERO no es el único vector perpendicular ya que, por ej, el vector $\vec{a} = (-3,1)$ también es perpendicular a $\vec{v} = (1,3)$.

$\Rightarrow$ FALSO.

b) Falso. Por definición de coordenadas respecto a una base,
$v = 1 \cdot (5,1) + 2 \cdot (0,3) = (5,1) + (0,6) = (5,7)$. Por tanto, $v \neq (5,1)$.

$\Rightarrow$ FALSO.

c) Para ser base en $\mathbb{R}^2$, los vectores deben ser linealmente independientes. En $B'$, los vectores $(1,\pi)$ y $(\frac{1}{\pi}, 1)$ son proporcionales:

$\pi \cdot \left(\frac{1}{\pi}, 1\right) = (1,\pi)$. Al ser dependientes, $B'$ no es una base.

$\Rightarrow$ FALSO.

d) Sea $\vec{v} = (5,1)$ y $\vec{u} = (3,2)$

$\vec{v} + \vec{u} = (5,1) + (3,2) = (8,3)$

↳ NO es perpendicular ni a $\vec{v}$ ni $\vec{u}$.
Ya hemos visto un CONTRAEJEMPLO.

$\Rightarrow$ FALSO.

e) Aplicando la fórmula del ángulo:

$$\cos(45^\circ) = \frac{v \cdot u}{|v| \cdot |u|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7+x}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

Si sustituimos $x=0$:

$$\frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \approx 0'989 \neq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\Rightarrow$ FALSO.

2.

Las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto a una base B son los números únicos, denominados a y b, que permiten expresar dicho vector como una combinación lineal de los vectores de la base.

Se escribe como $\vec{v} = (a,b)_B \Rightarrow \vec{v} = a \cdot u + b \cdot w$.

Ejemplo:

Sea la base $B = \{(1,0), (0,1)\}$. Si queremos representar el vector $\vec{v} = (3,2)$, sus coordenadas en esa base son $(3,2)$ ya que:

$\vec{v} = 3 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1) = (3,0) + (0,2) = (3,2)$. ✓.

3. Dados $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(2,0)$ y $D(2,1)$:

a) Recta r que pasa por A y B.

Primero, calculamos el vector director $\vec{AB} = B - A = (2-0, 2-0) = \vec{(2,2)}$.

Simplificamos el vector a $\vec{(1,1)}$ para que las ecuaciones sean más sencillas.

Sea el punto $A = (0,0)$ y vector $\vec{v} = \vec{(1,1)}$.

Ecuación vectorial:

$\vec{v} = (x_0, y_0) + t \cdot \vec{(v_1, v_2)} = \boxed{(0,0) + \vec{(1,1)}t} : r$ //

Ecuación paramétrica:

$\vec{v} = (0,0) + (t,t) \Rightarrow \vec{v} = (t,t)$

$\Rightarrow r: (x,y) = (t,t) \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}}$ //

Ecuación continua: $\boxed{r: x = y}$ // (Igualo t).

Ecuación general (implícita): $\boxed{r: x - y = 0}$ //

Ec. explícita: $\boxed{y = x : r}$ //

b) Ecuación de la recta s que pasa por C(2,0) y D(2,1).

Calculamos su vector director $= \vec{CD} = D - C = (2-2, 1-0) = \vec{(0,1)}$.

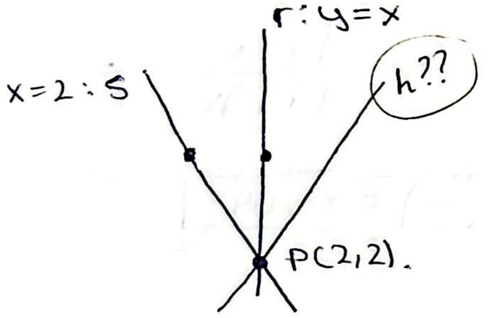
Al tener dos puntos con $x=2$, esto quiere decir que la $x$ siempre es 2 sin importar lo que valga la $y$, por tanto, la ecuación general es:

$\boxed{s:\ x=2}$ //

c) Posición relativa de r y s.

$$\begin{cases} x=2 \text{ (Recta s)} \\ y=x \text{ (Recta r)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow$$ SECANTES (Se cortan en P(2,2)).

d) Ecuación de la recta h simétrica a r respecto a s.




Tomo un punto de la recta r ($y=x$); por ej: A(0,0).

Este punto está a 2 unidades a la izquierda del espejo ($x=2$).

Su simétrico estará a 2 unidades a la derecha, es decir, en $x=4$. Entonces, el punto simétrico $A' = (4,0)$.

Hallamos la recta h que pasa por P(2,2) y A'(4,0).

$m = \frac{0-2}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$ //

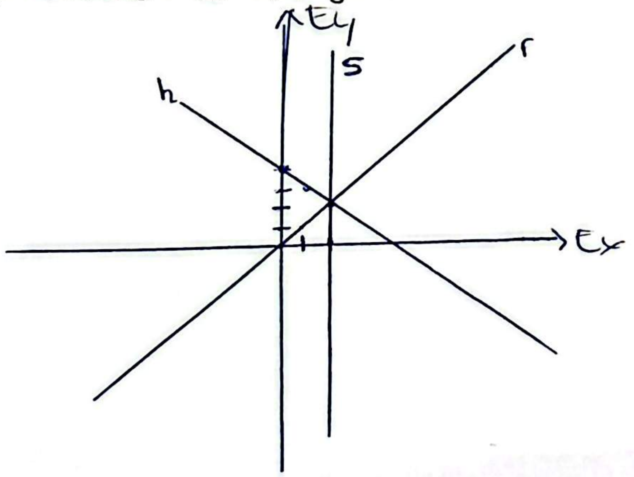
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-2}{0-2} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow -x+2 = 2y-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2 = y-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-x+4} : h.$$ //

e) Representación de r, s y h.




$h: y=-x+4$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |

(4) Dadas las rectas:

$r: y = 5x+2$ ; $s: y = 5x+8$ ; $h = \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2}$.

a) Calcule dist (r, s).

$\left.\begin{array}{l} r: y = 5x+2. \\ s: y = 5x+8. \end{array}\right\}$ Misma pendiente $(m=5) \Rightarrow$ PARALELAS.

$\left.\begin{array}{l} r: 5x - y + 2 = 0 \Rightarrow P(0,2). \\ s: 5x - y + 8 = 0 \Rightarrow P'(0,8). \end{array}\right\}$ $\text{dist}(P', r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{dist}(P', r) = \frac{|5 \cdot 0 + (-1) \cdot 8 + 2|}{\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{26}} = \boxed{1'18 \text{ uds}}$

b) Calcule el ángulo que forman h y r.

$\left.\begin{array}{l} r: y = 5x+2 \Rightarrow \vec{u_r} = (1,5). \\ h: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow \vec{v_h} = (2,2) = (1,1). \end{array}\right\}$ $\cos\alpha = \frac{|\vec{u_r} \cdot \vec{v_h}|}{|\vec{u_r}| \cdot |\vec{v_h}|} =$

$= \frac{|(1 \cdot 1) + (5 \cdot 1)|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{52}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{52}}\right) \approx 33,69^\circ}$

$|\vec{u_r}| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$.

$|\vec{v_h}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

5. EXTRA

- Calcule el área en función de dos parámetros $a, b \in \mathbb{R}^+$ del triángulo que se forma con la intersección de las tres siguientes rectas:

$$r: \frac{x-b}{b} = \frac{y}{2a} \quad ; \quad s: y=0; \quad t: \frac{x-2b}{b} = \frac{y-2a}{-2a}$$

Vértice $V_1$ (intersección de r y s)

Sustituimos $y=0$ en la ec. de r:

$$\frac{x-b}{b} = 0. \Rightarrow x-b=0 \Rightarrow \boxed{b=x} \Rightarrow \boxed{V_1 = (b,0)}$$

Vértice $V_2$ (intersección de r y t)

Igualamos las ecs. despejando x:

- De r: $x = \underbrace{\frac{by}{2a} + b}_{(2)}$
- De t: $x = \frac{b(y-2a)}{-2a} + 2b = \frac{by-2ab}{-2a} + 2b = \frac{by}{-2a} - \frac{2ab}{-2a} + 2b =$

$$= -\frac{by}{2a} + b + 2b = \underbrace{-\frac{by}{2a} + 3b}_{(1)}.$$

Igualamos (1) y (2):

$$\frac{by}{2a} + b = -\frac{by}{2a} + 3b \Rightarrow \frac{by}{2a} + \frac{by}{2a} = 3b - b = \frac{2by}{2a} = 2b \Rightarrow \frac{y}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y=a}$$

$\Rightarrow$ Sustituyo $y=a$ en (2):

$$x = \frac{b \cdot a}{2a} + b \Rightarrow x = \frac{b}{2} + b = \boxed{1'5b} \Rightarrow \boxed{V_2 = (1'5b, a)}$$

Vértice $V_3$ (intersección de t y s)

Sustituimos $y=0$ en la ec. de t:

$$\frac{x-2b}{b} = \frac{0-2a}{-2a} \Rightarrow x-2b=b \Rightarrow \boxed{x=3b} \Rightarrow \boxed{V_3 = (3b,0)}$$

**Base**: Es la distancia sobre el 0x entre $V_1$ y $V_3$.

Base $= |X_{V_2} - X_{V_1}| = |3b-b| = 2b$.

**Altura**: Es la coordenada y del vértice superior $V_2$, ya que la base está sobre el eje $y=0$.

Altura $= a$.

**Cálculo del área**: $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{\cancel{2}b \cdot a}{\cancel{2}} = \boxed{b \cdot a \ u^2}$.