EXAMEN TEMA 8 2021/2022

1. a) FALSO. El dominio depende del índice de la raíz y del radicando. Por ejemplo:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x+5} \rightarrow Dom(f) = [-5, +\infty)$$

b) VERDADERO. Una función es invertible si y solo si es biyectiva (cada valor de x tiene un único valor de y). Al ser inyectiva, permite que se cumpla la condición.

c) verdadero.

Si $y = \log_{10}[tg(x)] \Rightarrow 10^y = tg(x)$

$x = arctg(10^y)$

Si cambiamos las variables:

$$g(x) = arctg(10^x)$$

d) FALSO. La función $g(x) = \lceil x \rceil$ devuelve siempre un número entero. La función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ de un número que ya es entero, es el mismo número. Por tanto:

$$(f \circ g)(x) = \lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil x \rceil \Rightarrow \text{No es constante}$$

2. a) $f(x) = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow Dom(f) = [-2, 2]$

$4 - x^2 \geq 0$

$4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

b) $g(x) = \log\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right] \Rightarrow Dom(f) = (-1, +\infty)$

$\boxed{\begin{array}{l} x+1>0 \\ x>-1 \end{array}}$ $\boxed{\log\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right] > 0}$

c) $h(x) = \dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{x^3-4x^2+3x} \Rightarrow Dom(f) = (-\infty, 0)$

$-x \geq 0$

$x \leq 0$

$x^3-4x^2+3x = 0$

$x(x^2-4x+3) = 0 < \begin{array}{l} x=0 \\ x^2-4x+3=0 < \begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array} \end{array}$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} < \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}$

3) a) Sea $f(x) = \frac{1}{x-3}$

$y = \frac{1}{x-3}$

$x-3 = \frac{1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$

$x = \frac{1}{y} + 3$

verificación:

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}+3\right)-3} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

Sea $h(x) = \sqrt{x^2-1}$

$y = \sqrt{x^2-1}$

$y^2 = x^2-1 \Rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{x^2+1}$

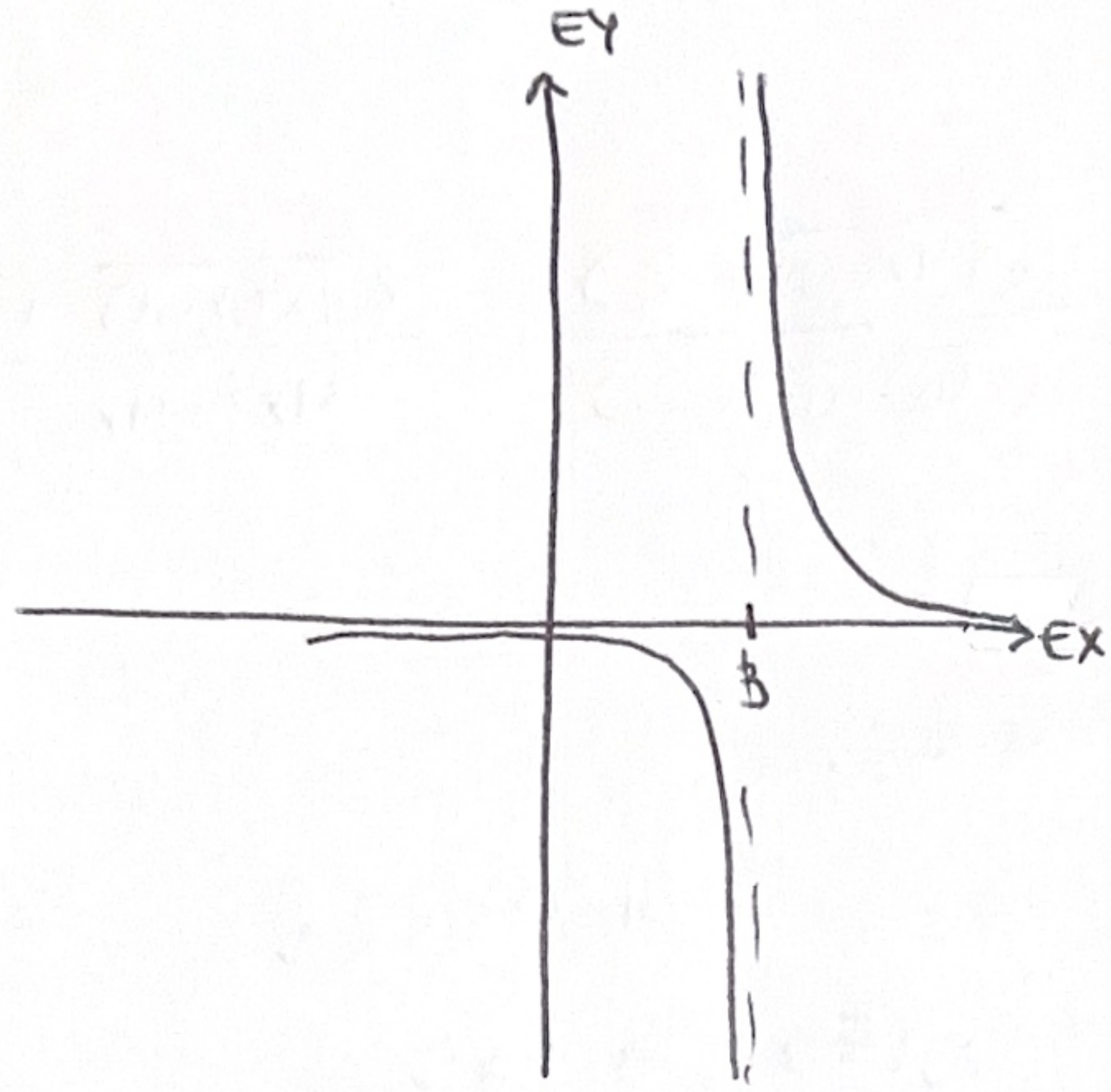
$x^2 = y^2+1$

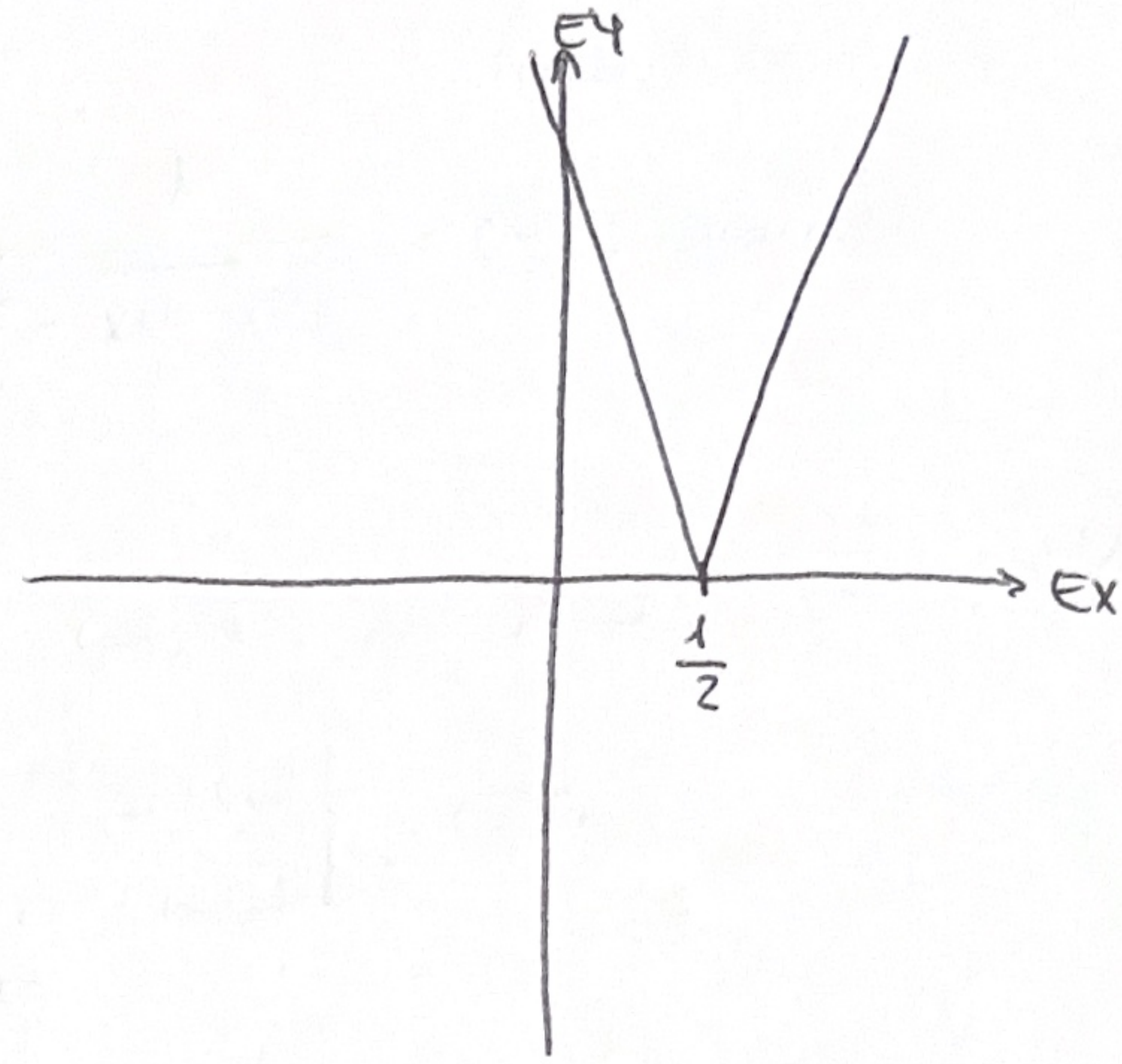
$x = \sqrt{y^2+1}$

verificación:

$h(h^{-1}(x)) = \sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2-1} = \sqrt{x^2+1-1} = x$

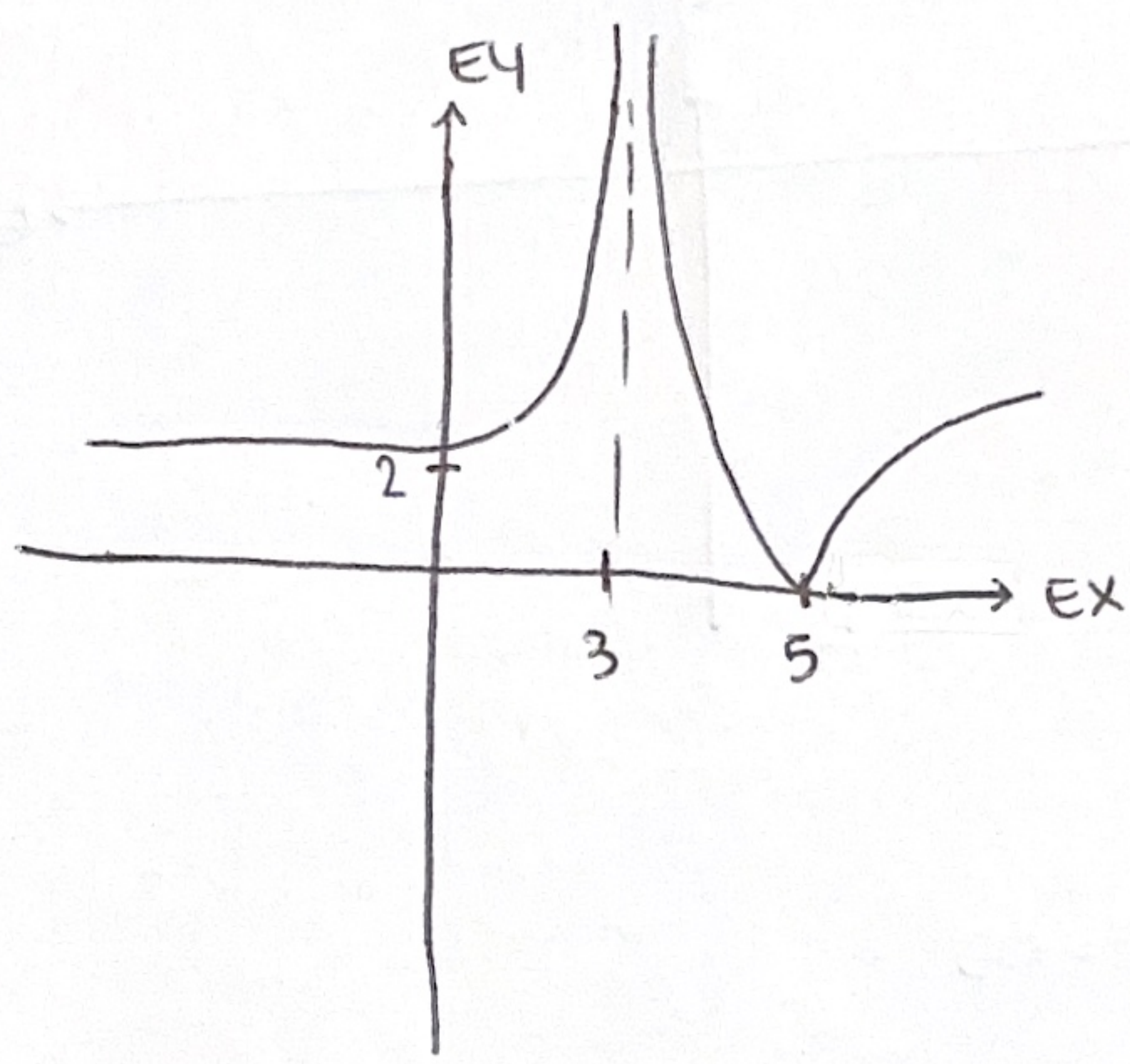
b)





$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x-3}}$$

$$\boxed{g(x) = |2x-1|}$$



$$\boxed{(g \circ f)(x) = \left| \frac{2}{x-3} - 1 \right|}$$

c)

$$\text{Monsieur}(x) = \frac{2\sqrt{x(x-1)} + 3}{4x^2 - 4x - 9}$$

$$(h \circ g)(x) = \sqrt{(2x-1)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1 - 1} = \sqrt{4x^2 - 4x} = 2\sqrt{x(x-1)}$$

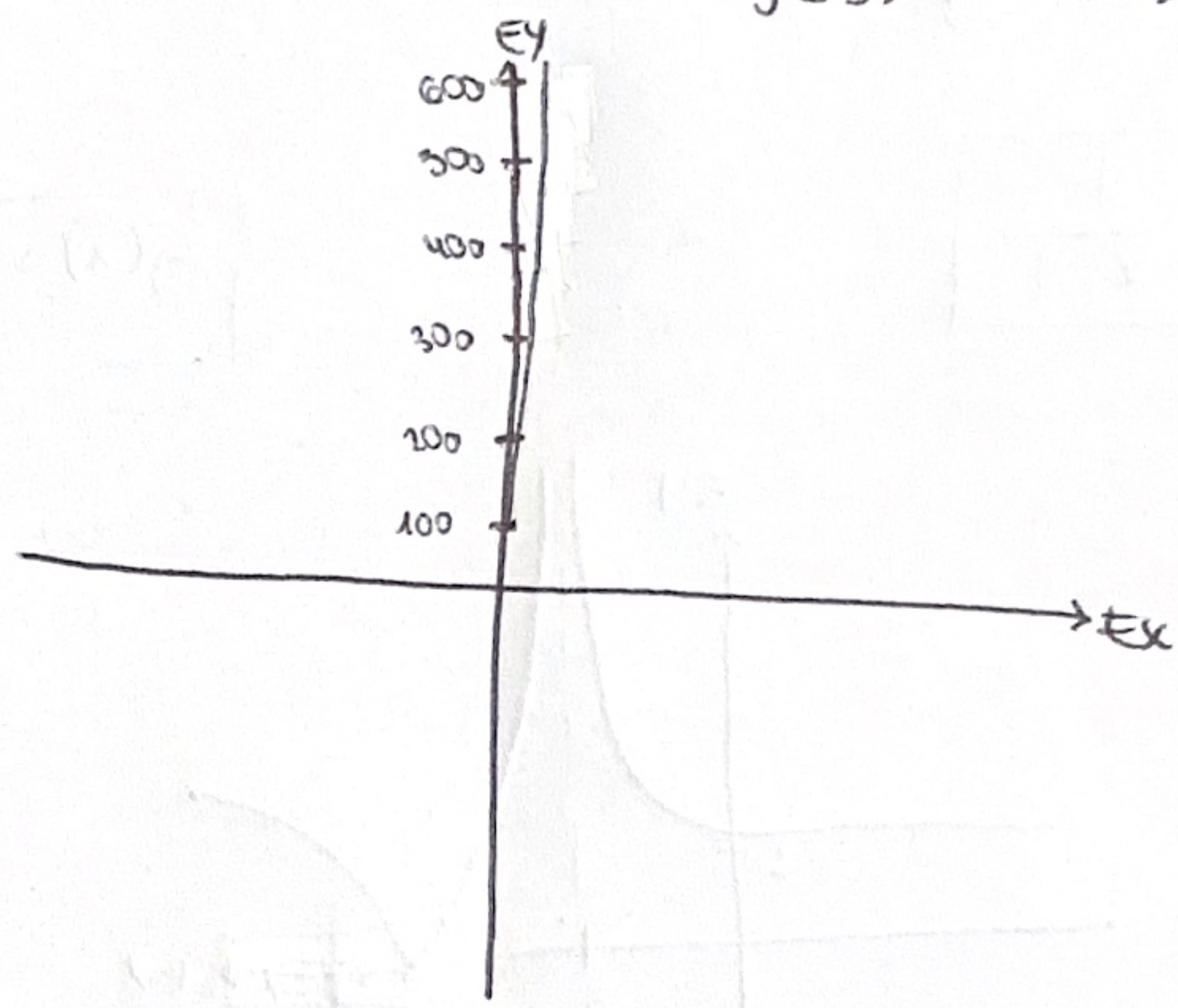
$$(f \circ h \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 4x} - 3}$$

Racionalizamos:

$$\text{Mensieur}(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-4x}-3} \cdot \frac{(\sqrt{4x^2-4x}+3)}{(\sqrt{4x^2-4x}+3)} = \frac{2\sqrt{x(x-1)}+3}{4x^2-4x-9}$$

(4) a) Sea la función a trozos:

$$C(t) = \begin{cases} 100 \cdot e^{\frac{3}{5}t} & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 2009 + 5000 \cdot \log\left(\frac{t}{5}\right) & \text{si } t > 5 \end{cases}$$



b) • Inicio $(t=0)$

$$C(0) = 100 \cdot e^0 = 100 \text{ positivos}$$

• 5 meses $(t=5)$

$$C(5) = 100 \cdot e^3 \approx 2009 \text{ positivos}$$

• 12 meses $(t=12)$

$$C(12) = 2009 + 5000 \cdot \log\left(\frac{12}{5}\right) \approx 3910 \text{ positivos}$$

c) Como $5415 > 2009$, usaremos $C(t) = 2009 + 5000 \cdot \log\left(\frac{t}{5}\right)$

$$5415 = 2009 + 5000 \cdot \log\left(\frac{t}{5}\right)$$

$$3406 = 5000 \cdot \log\left(\frac{t}{5}\right)$$

$$\frac{3406}{5000} = \log\left(\frac{t}{5}\right) \longrightarrow 10^{\frac{3406}{5000}} = \frac{t}{5}$$

$$\boxed{t \approx 24}$$

Solución: Aproximadamente en el mes 24