

Logaritmos

Definición	
Si $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama <i>logaritmo</i> en base a de b al exponente al que hay que elevar la base a para obtener b $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$	$\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$. $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
Una observación de interés	
Los números que son potencias exactas de la base tienen logaritmos enteros (ejemplos anteriores). Si no es así el logaritmo es un número decimal.	$\log_2 24$ es un número decimal situado entre 4 y 5 porque $2^4 = 16$ y $2^5 = 32$.
Propiedades de los logaritmos	Observaciones y ejemplos
1 Números distintos tienen logaritmos distintos. O sea: $b \neq c \Rightarrow \log_a b \neq \log_a c$ Además: - Si $a > 1$ y $b < c$, entonces $\log_a b < \log_a c$. - Si $0 < a < 1$ y $b < c$, entonces $\log_a b > \log_a c$.	De lo anterior se deduce que el logaritmo de base mayor que 1 es creciente (a números mayores logaritmos mayores), y que el logaritmo de base un número comprendido entre 0 y 1 es decreciente (a números mayores logaritmos menores).
2 El logaritmo de en base a de a es igual a 1: $\log_a a = 1$	Esta propiedad es evidente ya que $a^1 = a$.
3 El logaritmo de 1 es 0, sea quien sea la base: $\log_a 1 = 0$	Esta propiedad también es clara pues $a^0 = 1$.
4 El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	Si $\log_2 r = 4,3$ y $\log_2 s = -1,7$, calcular $\log_2 \left(\frac{r \cdot s}{4} \right) \text{ y } \log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3}.$ $\log_2 \left(\frac{r \cdot s}{4} \right) = \log_2 (r \cdot s) - \log_2 4 =$ $= \log_2 r + \log_2 s - \log_2 4 = 4,3 + (-1,7) - 2 = 0,6$ $\log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{r} - \log_2 s^3 =$ $= 1 + \log_2 r^{1/2} \cdot \log_2 s^3 = 1 + \frac{1}{2} \log_2 r - 3 \log_2 s =$ $= 1 + \frac{1}{2} \cdot 4,3 - 3 \cdot (-1,7) = 1 + 2,15 + 5,1 = 8,25$
5 El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos: $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$	
6 El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$	
7 El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$	
8 Cambio de base. El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base: $\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$	

Logaritmos decimales

Los logaritmos en base 10 se llaman logaritmos decimales y, en lugar de designarse mediante $\log_{10}$ se designan simplemente con $\log$. Es decir:

$$\log_{10} x = \log x$$

La tecla **log** de la calculadora sirve para calcular logaritmos decimales. Por la propiedad 8 anterior, se pueden obtener, con la ayuda de la calculadora, el logaritmo de un número en cualquier base. Por ejemplo:

$$\log_3 45 = \frac{\log 45}{\log 3} = 3,464973521$$

El número e

El número e es muy especial en matemáticas. Se define como el número al que tiende la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando x tiende a $+\infty$. De esta función podemos hallar sucesivamente $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(100)$, ..., $f(1000)$, ...

Por ejemplo: $f(1000) = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,716923932$, $f(1000000) = \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,718280469$.

Es posible demostrar (aunque esto requiere de matemáticas superiores), que cuando $x \rightarrow +\infty$, entonces $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tiende a un número irracional al que llamaremos número e . Simbólicamente:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e = 2,718281828...$$

Logaritmos neperianos

Se llaman así a los logaritmos cuya base es el número e , y se designan mediante la abreviatura $\ln$. De este modo el logaritmo neperiano de un número x es:

$$\ln x = \log_e x$$

Su nombre proviene de John Napier, un matemático escocés, reconocido por ser el primero en definir los logaritmos.

La tecla **ln** de la calculadora sirve para calcular logaritmos neperianos. Estos logaritmos, además de su interés histórico, son enormemente importantes en matemáticas superiores.

Ejemplos

1. Solamente utilizando la definición de logaritmo podemos calcular $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$. Observa:

$$\begin{aligned} \log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} &= \log_2 2^6 + \log_2 2^{-2} - \log_3 3^2 - \log_2 2^{1/2} = \\ &= 6 \log_2 2 + (-2) \log_2 2 - 2 \log_3 3 - \frac{1}{2} \log_2 2 = 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. Utilizando la definición de logaritmo también podemos resolver ecuaciones donde la incógnita es la base del logaritmo. Por ejemplo $\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5$.

3. Podemos expresar como un solo logaritmo ciertas expresiones, por ejemplo $\log b + 2 \log c - \log d$. Basta aplicar las propiedades a la inversa: $\log b + 2 \log c - \log d = \log b + \log c^2 - \log d = \log(b \cdot c^2) - \log d = \log \frac{b \cdot c^2}{d}$.

4. Con la calculadora y utilizando el cambio de base se pueden hallar logaritmos de base cualquier número.

$$\log_7 938 = \frac{\log 938}{\log 7} \approx 3,517 \quad ; \quad \log_{3/2} 127 = \frac{\ln 127}{\ln(3/2)} \approx 11,947$$