
Teoría y ejercicios de Matemáticas

Departamento de Matemáticas
Curso 4.º E.S.O
Colegio Romareda. Zaragoza.



agustinos
recoletos

COLEGIO ROMAREDA · ZARAGOZA

ÍNDICE

- TEMA 1 (Página 3): Números reales.
- TEMA 2 (Página 6): Radicales.
- TEMA 3 (Página 14): Polinomios.
- TEMA 4 (Página 19): Ecuaciones y sistemas. Problemas de planteo.
- TEMA 5 (Página 30): Inecuaciones y sistemas.
- TEMA 6 (Página 33): Trigonometría.
- TEMA 7 (Página 42): Geometría analítica.
- TEMA 8 (Página 55): Funciones: características y funciones elementales.
- TEMA 9 (Página 61): Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- TEMA 10 (Página 64): Estadística.
- TEMA 11 (Página 78): Probabilidad.
- TEMA 12 (Página 85): Semejanzas.



TEMA 1: NÚMEROS REALES

1.- CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números naturales: Se representan con la letra N.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Números enteros: Se representan con la letra Z.

Son los naturales, los naturales con signo menos y el cero.

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$N \subset Z$ se lee :N contenido en Z, es decir todo número natural es entero.

Números racionales: Se representa con la letra Q.

Son todos los que se pueden expresar en forma de razón o fracción: los enteros (fracciones con denominador uno), decimales exactos y decimales periódicos.

$Z \subset Q$ se lee Z contenido en Q, es decir todo número entero, y por eso también todo número natural, es racional.

Números irracionales: Se representan con la letra I.

Son los que no se pueden expresar como razón: decimales infinitos y no periódicos, las raíces no exactas y los números π , e.

Por su propia definición un número racional no es irracional y análogamente un número irracional no puede ser racional.

Números reales: Se representan con la letra R.

Los números racionales y los irracionales forman los números reales R: $Q \cup I = R$

Son números reales los naturales, enteros, fraccionarios (decimales exactos y periódicos) e irracionales (decimales infinitos y no periódicos).

No son reales las fracciones con denominador cero y las raíces de índice par y radicando negativo.

Todos los números reales se pueden representar en una recta.

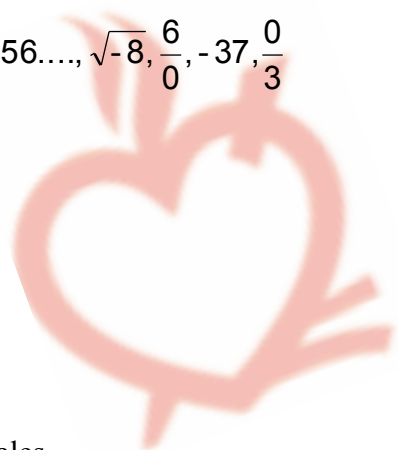
Ejercicios:

1) De los siguientes números:

$$\frac{3}{5}, 4, 0,23, -7, 1,54777\dots, \sqrt[5]{-3}, \sqrt{257}, \frac{-7}{5}, 2,375892\dots, -3,565656\dots, \sqrt{-8}, \frac{6}{0}, -37, \frac{0}{3}$$

- Escribe los que son racionales:
- Escribe los que son irracionales:
- Escribe los no reales:
- Escribe los reales:

2) Escribe 5 números irracionales, 5 racionales, 5 reales y 5 no reales.



2.- NOTACIÓN MATEMÁTICA

Se conoce como **notación científica** los símbolos que se utilizan para expresar una idea de modo concreto y sencillo.

- Los símbolos que más utilizamos son:

$<$ menor que, ejemplo $3 < 9$;

$>$ mayor que, ejemplo $10 > 2$

$\leq$ menor o igual que: $x \leq 2$, son todos los números reales menores que 2 incluido el 2

$\geq$ mayor o igual que: $x \geq 5$, son todos los números reales mayores que 5 incluido el 5

$\approx$ semejante ejemplo un cuadrado de 1m de lado es $\approx$ a otro de 2m de lado

$\cong$ aproximadamente, ejemplo $2'3754 \cong 2'37$

$\Leftrightarrow$ Equivalente $2x+5 = x+6 \Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ Se deduce o implica

$\forall$ Para todo número o valor

$\exists$ Existe

$\ni$ Tal que, también se simboliza I o con

$\wedge$ indica y

$\vee$ indica o

$\in$ Pertenece, ejemplo $2 \in \mathbb{N}$

$\cup$ Unión. La unión de dos conjuntos A y B , se escribe $A \cup B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos.

$\cap$ Intersección. La intersección de dos conjuntos A y B , se escribe $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B

$\subset$ Contenido $\subseteq$ contenido o igual

- Si sobre estos símbolos se cruza una línea indica lo contrario:

$\neq$ No igual o distinto $\notin$ no pertenece.....

∞ Infinito, $\emptyset$ vacío, $|$ Valor absoluto

- Si tenemos dos números reales a y b tales que a es menor que b :

Intervalo abierto de extremos a y b es el conjunto de números reales que son mayores que a y menores que b , se representa por (a,b) o por $]a,b[$ con notación de conjunto

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Ejemplo: $]2,7[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$, Son todos los números que son mayores que 2 y menores que 7

Intervalo cerrado de extremos a y b es el conjunto de números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b , se representa por $[a,b]$, con notación de conjunto

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Ejemplo: $[2,7] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$, Son todos los números que son mayores o iguales que 2 y menores o iguales que 7

- Todos los números mayores que a forman el intervalo $]a,\infty[$, con notación de conjunto:

$$]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

Ejemplo: $]2,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\}$, Son todos los números mayores que 2

- Todos los números menores que b forman el intervalo $]a, b[$, con notación de conjunto:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Ejemplo: $]a, 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$, Son todos los números menores que 7

- Todos los números mayores o iguales que a forman el intervalo $[a, \infty[$ o $[a, \infty)$, con notación de conjunto: $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ es **intervalo semiabierto o semicerrado**

Ejemplo: $[2, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$, Son todos los números mayores o iguales que 2

- Todos los números menores o iguales que b forman el intervalo $] - \infty, b]$ o $(-\infty, b]$, con notación de conjunto: $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ es **intervalo semiabierto o semicerrado**

Ejemplo: $] - \infty, 7] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$, Son todos los números menores o iguales que 7

Ejercicios:

1.- Escribe con notación de conjunto, con notación de intervalo y gráficamente:

- Todos los números reales que son mayores que -7
- Todos los números que son mayores que -5 y menores que 6
- Todos los números comprendidos entre 2^6 y 10^5
- Todos los números reales que son menores que $9/3$
- Todos los números reales que son mayores o iguales que 3
- Todos los números que son mayores o iguales que 3 y menores o iguales que 20
- Todos los números comprendidos entre -5 y 14
- Todos los números reales que son menores o iguales que $\sqrt{7}$

2.- Escribe con frase y gráficamente el significado de los siguientes intervalos:

- $(-5, 7)$
- $\left[\frac{1}{5}, 7\right]$
- $] - \infty, 7]$
- $(2, \infty)$
- $[4, \infty[$
- $] 0, \sqrt{70}[$

Un número en notación científica se expresa como el producto de un número decimal, con valor absoluto comprendido entre 1 y 10, por una potencia de 10

Para sumar (o restar) números con notación científica tienen que tener el mismo exponente en la potencia y se suman (o restan) los números decimales y se deja la misma potencia

Para multiplicar (o dividir) números con notación científica se multiplican (o dividen) los números decimales y las potencias

Ejemplos:

$$23\,478 = 2,3478 \cdot 10^4 \approx 2,3 \cdot 10^4$$

$$0,00135 = 1,35 \cdot 10^{-3}$$

$$0,7 \cdot 10^3 + 1,3 \cdot 10^2 - 2,5 \cdot 10 = 7 \cdot 10^2 + 1,3 \cdot 10^2 - 0,25 \cdot 10^2 = (7 + 1,3 - 0,25) \cdot 10^2 = 8,05 \cdot 10^2$$

$$2,3 \cdot 10^4 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3} = 3,105 \cdot 10$$

$$1,3 \cdot 10^7 : 1,1 \cdot 10^3 = 1,18 \cdot 10^4$$

TEMA 2: RADICALES

1.- DEFINICIÓN DE RAÍZ n-esima DE UN NÚMERO REAL

Llamamos raíz n-ésima de un número real a, a otro número real b que, elevado a la potencia n, nos da como resultado el radicando: $\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$

Ejemplos : $\sqrt[5]{32} = 2$ pues $2^5 = 32$ o $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ pues $(\pm 3)^4 = 81$

2.- ELEMENTOS DE UN RADICAL

En la siguiente raíz los elementos que la componen reciben el nombre de:

$$c \sqrt[n]{a^m} = b \left\{ \begin{array}{l} \text{La letra b es la raíz} \\ \text{La letra n es el índice} \\ \text{La letra m es el exponente del radicando} \\ \text{El signo } \sqrt{} \text{ se llama signo radical} \\ \text{La letra c es el coeficiente} \\ \text{La expresión } a^m \text{ es el radicando} \end{array} \right.$$

Todas las operaciones en las que aparece el signo radical se llaman operaciones con radicales o simplemente radicales

Un radical es igual a una potencia de exponente fraccionario que tiene de base la base del radicando y de exponente una fracción cuyo numerador es el exponente del radicando y cuyo denominador es el índice del radical, es decir:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplos: $\sqrt[5]{2x^3} = (2x^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} x^{\frac{3}{5}}$ o $2x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{x^3} \sqrt[3]{y}$

3.- PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES:

El valor de un radical no cambia si se multiplican o se dividen el exponente del radicando y el índice del radical por un mismo número, es decir:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}}$$

Esta propiedad nos permite transformar radicales en otros equivalentes y se utiliza para:

a) **Simplificar radicales.** Si dividimos el exponente de radicando y el índice del radical por el mismo número. Ejemplo: $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

b) **Reducir radicales a índice común.** Para ello calculamos previamente el mínimo común múltiplo de los índices y éste será el índice común. Posteriormente multiplicaremos el exponente de cada radical por el mismo número que hemos multiplicado sus índices (es el que resulta de dividir el índice común por el índice que tenía el radical)

Ejemplo: $\sqrt[3]{2x^2}, \sqrt{y^3}, \sqrt[5]{3^2} \Rightarrow \sqrt[30]{2^{10} x^{20}}, \sqrt[30]{y^{45}}, \sqrt[30]{3^{12}}$

4.- EXTRACCIÓN E INTRODUCCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL.

a) Para introducir un factor dentro de un radical, basta elevar ese factor a un exponente igual al índice del radical. Ejemplo: $4x^2 \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{4^3 x^6 y}$

b) Para extraer factores de un radical realizamos la división del exponente entre el índice. El cociente es el exponente del factor que extraemos de la raíz y el resto es el exponente del factor que se queda en el radicando. Sólo se pueden extraer los factores que tienen un exponente mayor o igual que el índice. Ejemplo: $\sqrt[3]{2^7 x^3 y^2} = 2^2 x \sqrt[3]{2y^2}$

5.- RACIONALIZAR RADICALES es sustituir una fracción por otra equivalente que no tenga raíces en el denominador.

Estudiaremos los casos siguientes:

1) Si el denominador es un monomio con un radical de índice dos, se multiplican numerador y denominador por el radical del denominador.

Ejemplo: $\frac{3}{4\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{4 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$

2) Si el denominador es un monomio con un radical de índice n, multiplicaremos los dos términos de la fracción por la raíz n-ésima de una expresión cuyo producto por el radicando del denominador sea potencia n-ésima perfecta

Ejemplo: $\frac{3}{\sqrt[5]{2x^3 y^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4 x^2 y^3}}{\sqrt[5]{2x^3 y^2} \sqrt[5]{2^4 x^2 y^3}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4 x^2 y^3}}{\sqrt[5]{2^5 x^5 y^5}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4 x^2 y^3}}{2xy}$

3) Si en el denominador aparecen binomios con radicales de índice dos, se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado se obtiene al cambiar el signo de uno de los términos del binomio.

En el denominador queda el producto de una suma por una diferencia que es igual a la diferencia de sus cuadrados y de esta manera eliminamos sus raíces.

Ejemplos: $\frac{6}{\sqrt{5} + y} = \frac{6(\sqrt{5} - y)}{(\sqrt{5} + y)(\sqrt{5} - y)} = \frac{6\sqrt{5} - 6y}{(\sqrt{5})^2 - y^2} = \frac{6\sqrt{5} - 6y}{5 - y^2}$

$\frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{(\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2 - 6} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{-4}$

Los radicales son **homogéneos** si tienen el mismo índice. Ejemplo $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[5]{yz}$, $\sqrt[5]{2x}$

Los radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ej: $\sqrt[5]{x}$, $-5 \sqrt[5]{x}$, $3 \sqrt[5]{x}$

6.- OPERACIONES CON RADICALES.

a) **Para sumar radicales** tienen que ser semejantes.

- Para sumar radicales semejantes se suman los coeficientes de los sumandos y se deja el mismo radical.

- En el caso de que los radicales no sean semejantes, hay que intentar transformarlos en otros equivalentes que sí lo sean (reduciendo a índice común-propiedad fundamental de los radicales-, racionalizando o sacando factores) En el caso que no se pueda, la operación se deja indicada.

Ejemplo : $a\sqrt{bc} + a^2\sqrt{bc} - 2a\sqrt{bc} = (a + a^2 - 2a)\sqrt{bc} = (a^2 - a)\sqrt{bc}$

b) Para multiplicar radicales tienen que ser homogéneos.

- Para multiplicar radicales homogéneos se multiplican los radicandos y los coeficientes dejando el mismo índice.

- Si los radicales no son homogéneos los transformamos reduciendo a índice común.

Ejemplo: $\sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt{3y} = \sqrt[6]{2^2 x^2} \cdot \sqrt[6]{3^3 y^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3 x^2 y^3}$

c) Para elevar un radical a una potencia elevaremos su radicando a dicha potencia.

Ejemplo: $(\sqrt[3]{x^2})^4 = \sqrt[3]{x^8}$

d) Raíz de una raíz es una raíz que tiene por índice el producto de los índices y el mismo radicando. Ejemplo: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{xyz}} = \sqrt[15]{xyz}$



Ejercicios con radicales:**1.- Extrae las siguientes raíces:**

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \sqrt{64} = & \sqrt{\frac{4}{225}} = & \sqrt{-16} = & \sqrt[3]{\frac{-27}{64}} = \\
 \text{b)} \sqrt[3]{\frac{1}{729}} = & \sqrt{144} = & \sqrt{81} = & \sqrt[3]{\frac{-8}{125}} = \\
 \text{c)} \sqrt{-25} = & \sqrt[3]{64} = & & \\
 \text{d)} \sqrt[3]{-27} = & \sqrt[3]{-216} = & \sqrt[3]{\frac{216}{343}} = & \sqrt[3]{729} = \\
 \text{e)} \sqrt[3]{\frac{729}{512}} = & \sqrt{-125} = & \sqrt[4]{16} = & \sqrt[3]{\frac{b^6}{216}} = \\
 \text{f)} \sqrt[4]{-81} = & \sqrt[3]{\frac{-1}{27b^6}} = & \sqrt[4]{625} = & \sqrt[4]{-1296} = \\
 \text{g)} \sqrt[5]{\frac{-32}{b^{10}}} = & \sqrt{4x^6y^{12}} = & \sqrt[4]{14641} = &
 \end{array}$$

2.- Escribe como potencias los siguientes radicales:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \sqrt[3]{3z} = & \sqrt[5]{a^3} = & \sqrt{x^4a^8} = & \sqrt[3]{\frac{c-2}{c+2}} = \\
 \text{b)} \sqrt{y^3\sqrt{y}} = & \frac{3a\sqrt{b^3}}{2\sqrt[3]{b^2}} = & 2x^2\sqrt[5]{y^2} = & 4\sqrt[3]{(x+y)^2} =
 \end{array}$$

3.- Escribe con radicales las potencias fraccionarias:

$$2x^{\frac{1}{3}} = \quad (3ab^2)^{\frac{1}{3}} = \quad 4(x-y)^{\frac{2}{3}} = \quad \frac{3x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}}{4y^{\frac{4}{3}}} =$$

4.- Realiza las siguientes operaciones y pon el resultado en forma de radical:

$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \quad 2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{4}} = \quad \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad 35^{\frac{3}{2}} : 7^{\frac{3}{2}} =$$

5.- Extraer los factores posibles:

$$a) \sqrt{216b^4} = \quad \sqrt{1024b^5} = \quad \sqrt{36b^3x^{12}} = \quad \sqrt{\frac{1}{4}b^3} =$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{32}b} = \quad \sqrt{\frac{18b^6}{75b^3}} = \quad \sqrt[3]{8b^6c^5} = \quad \sqrt[3]{125b^4x^7} =$$

$$c) \sqrt[3]{64b^{12}x^9y^6} = \quad \sqrt[4]{1024x^5} = \quad \sqrt[4]{243b^7} = \quad \sqrt[4]{32b^5m^9} =$$

6.- Introduce los factores en el radical y simplifica:

$$a) 2x\sqrt{x} \quad 3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx} \quad \frac{4x}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy} \quad \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x}$$

$$b) 3\sqrt[3]{3} \quad \frac{2}{3}\sqrt[3]{9} \quad \frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}} \quad (x-y)^2\sqrt[3]{5} =$$

7.- Racionalizar:

$$\frac{3}{\sqrt{9a}} = \quad \frac{2}{\sqrt{27}} = \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^3}} = \quad \sqrt{\frac{2}{5}} =$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \quad \frac{4}{\sqrt[5]{4x^2y^3z}} = \quad \sqrt[3]{\frac{3x}{2y^2z}} = \quad \sqrt[4]{\frac{2}{ab^2}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{x+y}} = \quad \frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}} = \quad \frac{5}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{(2+x)^2}} = \quad \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{x}} = \quad \sqrt{\frac{1}{x-y}} = \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} =$$

$$\frac{a}{\sqrt{m}} = \quad \frac{5}{\sqrt{3}} = \quad \frac{a}{a+\sqrt{b}} = \quad \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \quad \frac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \quad \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \quad \frac{a}{\sqrt[3]{a^3}} = \quad \frac{2}{\sqrt[3]{2^3}} =$$

$$\frac{m}{q\sqrt[5]{m^2}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{3^2}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{2\sqrt{y} - 2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{5} - 1} =$$

$$\frac{3}{3 + \sqrt{6}} = \frac{3}{4 - \sqrt{13}} = \frac{5}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{3^3}} = \frac{7}{3\sqrt[6]{7^4}} =$$

8.- Calcula el valor de las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = \quad \text{b) } \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} - \frac{5}{\sqrt{6} + 1}$$

$$\text{c) } \frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{6}{\sqrt{7} + 1} = \quad \text{d) } \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{7} - 2} - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

9.- Transforma los siguientes radicales en otros equivalentes (tres de cada uno)

$$\sqrt[3]{5^4} = \quad \sqrt[3]{2ab^2} = \quad \sqrt[4]{3x^3y^5} = \quad \sqrt[6]{2^3x^6y^3} =$$

10.- Reduce a índice común los siguientes radicales:

$$\text{a) } \sqrt{b}, \sqrt[3]{b^2}, \sqrt[6]{b^5}, \sqrt[10]{b^3} \quad \text{b) } \sqrt{mx}, \sqrt[5]{m^3x^2}, \sqrt[6]{m^5x}, \sqrt[3]{x^4y^2}$$

$$\text{c) } \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[6]{32} \quad \text{d) } \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{81}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{27}$$

$$\text{e) } \sqrt{3x}, \sqrt[3]{9x^2}, \sqrt[4]{5x^3}, \sqrt[10]{6x^9} \quad \text{f) } \sqrt{2xy}, \sqrt[3]{3xy^2}, \sqrt[4]{4x^3y^3}, \sqrt[6]{6x^5y^3}$$

11.- Efectuar las siguientes sumas:

$$\text{a) } 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \quad \text{b) } 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$$

$$\text{c) } 2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125} = \quad \text{d) } \frac{1}{4}\sqrt{128} + 6\sqrt{512} - \frac{1}{2}\sqrt{32} - 3\sqrt{98} =$$

$$\text{e) } \frac{2}{5}\sqrt{20} - \frac{3}{5}\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{180} + 6\sqrt{45} = \quad \text{f) } \frac{4}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} =$$

g) $5\sqrt{\frac{9}{2}} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{\frac{25}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} =$ h) $7\sqrt{\frac{4}{3}} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{\frac{16}{3}} - \sqrt{27} =$

i) $3\sqrt{\frac{1}{5}} + 7\sqrt{\frac{4}{5}} - 2\sqrt{5} + \sqrt{20} =$ j) $3\sqrt{6} - 4\sqrt{\frac{25}{6}} + 3\sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{32}{3}} =$

k) $7\sqrt{\frac{32}{5}} - 2\sqrt{10} + \frac{1}{4}\sqrt{40} =$ l) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 4\sqrt{48} - 5\sqrt{300} + 9\sqrt{972} =$

m) $2\sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{50}{3}} + 3\sqrt{\frac{200}{3}} + 3\sqrt{24} =$ n) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{\frac{81}{2}} + 16\sqrt{\frac{1}{8}} - 5\sqrt{\frac{25}{8}} =$

o) $2\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{250}$ p) $2\sqrt[4]{4375} - \sqrt[4]{9072} - 3\sqrt[4]{567} + \sqrt[4]{112}$

q) $5\sqrt[4]{176} - 3\sqrt[4]{891} + 6\sqrt[4]{6875} - 2\sqrt[4]{14256}$

r) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} + \sqrt{\frac{1}{6}}$ s) $5\sqrt[6]{8} - 3(\sqrt{4} + \sqrt[10]{32}) - 8\sqrt[8]{16} + \sqrt{\frac{1}{8}}$

t) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{6} + \sqrt{\frac{1}{6}}$ u) $2\sqrt{80} + \frac{14}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}} - \sqrt{8} - \frac{9}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{81}}$

v) $3\sqrt{x} - \sqrt{4x} + 2\sqrt{36x} - 5\sqrt{x - \frac{9x}{25}}$ y) $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{1}{2x}} + \sqrt{8x}$

z) $3\sqrt[3]{\frac{2x}{9}} - 2\sqrt[3]{\frac{3x}{4}} + 5\sqrt[3]{\frac{6x}{125}}$ A) $\sqrt{\frac{2a}{b}} - \sqrt{\frac{2b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{2b}} + \sqrt{\frac{2}{ab}} - \sqrt{\frac{ab}{2}}$

B) $\frac{cd}{a}\sqrt{\frac{a^6}{cd}} - \frac{b^2d}{a}\sqrt{\frac{4a^4c}{b^2d}} + \frac{d^2}{c}\sqrt{\frac{b^4c^3}{d^3}}$ C) $\sqrt{4a-8b} - \sqrt{9a-18b} + 2\sqrt{16a-32b}$

D) $\sqrt{(3-2x)^3} + \sqrt{12-8x} - \sqrt{3x^2-2x^3}$

12. – Efectúa las siguientes operaciones:

a) $12\sqrt{\frac{1}{3}} : \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{12}} =$ b) $26\sqrt{18} : 2\sqrt{\frac{9}{50}} =$ c) $\frac{4}{3}\sqrt{48} : \frac{1}{9}\sqrt{3} =$

d) $(2 + \sqrt{3})^2 =$ e) $(2 - \sqrt{3})^2 =$ f) $\frac{(4\sqrt{6} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})}{2(10 - \sqrt{2})} =$

g) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$ h) $8\left(\sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{9}{8}}\right)\left(\sqrt{32} - 3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

i) $\sqrt{2} (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18}) =$ j) $\sqrt{3} (\sqrt{108} - \sqrt{27} + \sqrt{48}) =$ k) $a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} =$
 l) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} =$ m) $2\sqrt{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}) =$ n) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}} =$ o) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \sqrt{\frac{15}{4}} =$
 p) $\sqrt{xy} \cdot (\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2y}) =$ q) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) =$ r) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt[3]{b^2}) =$
 s) $\sqrt[3]{x-y} \cdot \sqrt{x-y} \cdot \sqrt[3]{27x-27y} =$ t) $\sqrt[4]{12}(5\sqrt{3} : \sqrt[3]{9}) - \left(\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \right) =$
 u) $\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt[3]{2a^2b^2} \cdot ab =$ v) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) \sqrt{xy} =$ w) $\sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x-1}} =$
 x) $\sqrt{2a} : \sqrt[3]{\frac{1}{4a^2}} =$ y) $\left(\sqrt{\frac{a}{2b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4b^2}{a^2}} \right) : \sqrt{\frac{2b}{a}} =$ z) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} : \sqrt[4]{a^3} \right) : \left(\frac{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[8]{a^7}} \right) =$

13.- Escribe las siguientes expresiones bajo un solo radical y simplifica los resultados:

a) $\sqrt{\sqrt{8}} =$ b) $\sqrt{2\sqrt{2}} =$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{32}} =$ d) $\sqrt{2\sqrt[4]{3\sqrt[3]{4}}} =$ e) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}} =$
 f) $3\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{3}} =$ g) $\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{4}} =$ h) $\sqrt{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}} =$ i) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}} =$
 j) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{\frac{1}{b}}\sqrt[3]{b^4}\sqrt{\frac{1}{b}}} =$ k) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\sqrt{b} \cdot \sqrt{b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}} =$ l) $\sqrt{25\sqrt{81}\sqrt{256}} =$
 m) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}} =$ n) $\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4}-\sqrt{25a^8}} =$ o) $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}} \right)^{32} =$



TEMA 3: POLINOMIOS

1.- DEFINICIÓN DE POLINOMIO: expresión algebraica formada por suma o resta de monomios no semejantes

Monomio: expresión algebraica formada por el producto de un número (coeficiente) y una o varias letras elevadas a un número natural (parte literal).

2.- CONCEPTOS RELACIONADOS:

- Monomios semejantes: aquellos que tienen la misma parte literal.
- Grado de un monomio: exponente de la letra de la parte literal
- Grado de un polinomio: mayor exponente de los monomios que lo forman
- Término independiente de un polinomio: monomio sin parte literal
- $P(x)$: se lee “P de x” y significa que el polinomio depende del valor de x.
- Valor numérico de un polinomio cuando $x=a$ es el valor que resulta de sustituir la x por a y operar: $P(a)$
- Raíz o cero de un polinomio: es el valor de x que hace que el valor numérico del polinomio sea 0, es decir, es el valor $x=a$ que hace que $P(a)=0$

3.- OPERACIONES CON POLINOMIOS: suma, resta, producto y división de polinomios.

4.- FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO: expresar un polinomio como producto de expresiones irreducibles.

- Sacar factor común
- productos notables:

$$a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$$

$$a^2+b^2-2ab = (a-b)^2$$

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$$

- Ruffini

5.- TEOREMA DEL RESTO:

$$\text{Resto de la división } \left[\frac{P(x)}{x-a} \right] = P(a)$$



Ejercicios con polinomios

1. – Dados los siguientes polinomios:

$$A = 2x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 7x$$

$$B = 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 4$$

$$C = 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 9x + 3$$

$$D = 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x + 6$$

Calcula:

a) $A + B + C + D$

b) $A - B - C + D$

c) $(2A - 3B) - (2C + D)$

2. – Efectúa los siguientes productos:

a) $(2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 3) \cdot (2x^2 - 9x + 6)$

b) $(2x^3 - 4x^2 + 5x - 4) \cdot (3x^2 - 5x + 6)$

3. – Calcula: a) $[(2x^2 - 5x + 3) \cdot (4x^2 + 2x - 5)] \cdot 2x^3$

b) $[(2x^2 - 4x + 5) \cdot (3x^2 - 4x + 7)] - (5x^2 - 4x + 3)^2$

4. – Efectúa las siguientes divisiones

a) $18x^6 - 33x^5 + 7x^4 - 11x^3 + 31x^2 - 21x + 9 : 2x^2 - 5x + 3$

b) $10x^7 - 26x^5 + 33x^4 + 6x^3 - 31x^2 + 32x - 15 : 2x^3 - 4x + 5$

c) $6x^6 + 22x^5 + 23x^4 - 5x^3 - 34x^2 + 45x - 18 : 2x^2 + 4x - 3$

d) $18x^7 - 6x^6 + 27x^5 - 41x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 17x + 12 : 2x^3 + 3x - 4$

e) $8x^6 - 20x^5 + 22x^4 - 32x^3 + 30x^2 - 20x + 12 : 2x^3 - 2x^2 - 4$

5. – Calcula el cociente y el resto empleando las Reglas de Ruffini

a) $(6x^4 - 4x^3 + 2x - 6) : (x - 3)$

b) $(5x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5) : (x + 1)$

c) $(3x^6 + 3) : (x + 1)$

d) $(x^4 - 4x^2 + 8) : (x - \frac{1}{2})$

e) $(x^4 - 6x^2 + 12) : (x - \frac{1}{3})$

6. – Calcula los ceros (raíces enteras) y factoriza

a) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$

c) $x^4 + 9x^3 + 19x^2 - 9x - 20$

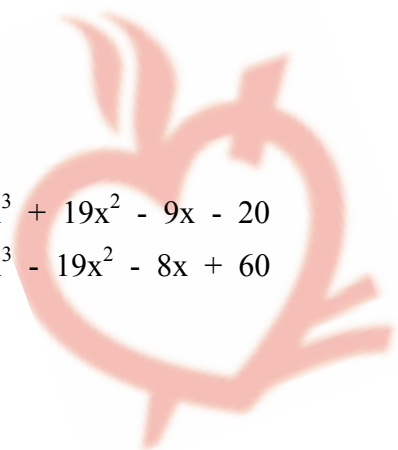
b) $x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 32x - 60$

d) $x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 8x + 60$

7. – Calcula el valor numérico de los polinomios

a) $x^4 - 5x^2 + 2x - 3$ para $x = 2$

b) $x^5 - 3x^2 + 2x - 8$ para $x = \frac{1}{2}$



8. – Calcula el verdadero valor de las siguientes fracciones

a) $\frac{x^4 - 16}{x^3 - x^2 - 4}$ para $x = 2$

c) $\frac{x^3 - 5x^2 + x + 15}{x^3 - 27}$ para $x = 3$

b) $\frac{x^5 + 1}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ para $x = -1$

d) $\frac{3x^3 - 3x + 72}{2x^2 - 18}$ para $x = -3$

9. – Dada la siguiente fracción

• $\frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}$

a) Factoriza sus dos términos.

b) Una vez factorizados, simplifícala.

c) Una vez simplificada, calcula su valor numérico para $x = \sqrt{0,4}$

10. – La expresión $x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12 = 0$ es una ecuación polinómica que admite como soluciones enteras $x = 3$; $x = 4$ y $x = -1$. ¿Cuál es la cuarta solución?

11. – Sin necesidad de hacer las divisiones, explica cuál de ellas son exactas y cuáles no

a) $(x^5 - 32) : (x + 2)$

c) $(x^5 + 32) : (x - 2)$

b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

d) $(x^5 + 32) : (x + 2)$

12. – Calcula el verdadero valor de la fracción

• $\frac{x^4 - 4x^2 + 2x - 4}{x^3 - 8}$ para $x = 2$

13. – Dada la fracción: • $\frac{x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 36x - 36}{x^4 - 13x^2 + 36}$

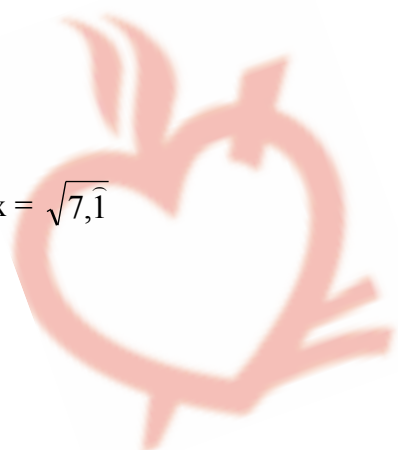
a) Factoriza sus dos términos.

b) Una vez factorizada, simplifícala.

c) Una vez simplificada, calcula su valor numérico para $x = \sqrt{7,1}$

14. – ¿Para qué valor de “m” el polinomio

• $x^4 + 8x^3 + 11x^2 - mx - 60$ es divisible por $x + 3$?



Ejercicios de fracciones algebraicas:

1.- Descomponed en factores los siguientes polinomios:

- 1.- a) $a^2x - x^3 - ax^2 =$ b) $2ab - 3ax + a =$
 c) $(a+b)^2 - 3(a+b)a + 5(a+b)(a-b) =$ d) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}ax + \frac{5}{6}a^2x^3 =$
 2.- a) $x^2 - 6x + 9 =$ b) $4x^2 - 12x + 9 =$ c) $x^6 - 2x^3y + y^2 =$
 d) $a^2b^4 - 2ab^2y + y^2 =$ e) $\frac{4x^2}{25} - \frac{3xy}{5} + \frac{9y^2}{16} =$ f) $\frac{1}{4}x^2 - 3xy + 9y^2 =$
 3.- a) $16x^2 - 9y^2 =$ b) $m^2 - \frac{4}{25}n^2 =$ c) $\frac{16}{49} - \frac{a^2b^2}{36} =$
 d) $x^2 - (a-b)^2 =$ e) $(x-2)^2 - (2-y)^2 =$ f) $(a-2b)^2 - (a+b)^2 =$
 4.- a) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 =$ b) $2x^3 - 5x^2 + x + 2 =$ c) $x^2 - 9x + 14 =$
 5.- a) $x^3 + 8 =$ b) $y^3 - a^3 =$ c) $\frac{x^3}{8} - 27 =$ d) $125a^3 + 1 =$
 6.- a) $vy - xy + vz - xz =$ b) $2a - ax + 2b - bx =$ c) $3ab + ac + 3bd + cd =$
 d) $ax + by - ay - bx =$ e) $am - bm + an - bn =$ f) $m^2 - mn + mx - nx =$

2.- Hallad el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes conjuntos de polinomios:

- a) $2x^4y - 4x^3y^2 + 2x^2y^3$; $x^3y^2 - xy^4$ b) $a^2 - b^2$; $(a+b)^2$; $a^3 + b^3$
 c) $x^2 - y^2$; $x^2 - 2xy + y^2$; $x^2 - xy$ d) $a^2 - 1$; $a^2 + 2a + 1$; $a^3 + 1$

3.- Simplificad las siguientes fracciones:

- a) $\frac{12ax^3}{8ax^2} =$ b) $\frac{3(x-2)^2}{4(x^2-4)} =$ c) $\frac{3ax+3a^2}{12ax} =$ d) $\frac{15mn^2-12m^2n}{21m^2n^2} =$
 e) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} =$ f) $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} =$ g) $\frac{ax+ay}{ax^2+ay^2} =$ h) $\frac{4xy+4x}{2xy+2x-4xy-4x} =$
 i) $\frac{(x^2-4)(x-2y)}{(y-2x)(x^4-16)} =$ j) $\frac{ab+b^2+b}{a^2b+2ab^2+b^3-b} =$ k) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3} =$
 l) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1} =$ m) $\frac{(x+y)^2-(a+b)^2}{(x+a)^2-(y+b)^2} =$ n) $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{2a^2b-4ab^2} =$

4.- Suma de fracciones algebraicas:

$$a) \frac{3}{x-y} + \frac{2(x+y)}{x^2-2xy+y^2} + \frac{3}{x+y} =$$

$$b) \frac{a}{2b} + \frac{a-1}{3b} + \frac{a-b}{6b} + \frac{b}{4} =$$

$$c) \frac{3a}{3ab-2b^2} + \frac{3a+2b}{12ab} + \frac{4b}{9a^2-6ab} =$$

$$d) \frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} + \frac{x^2}{1-x^2} + 1 =$$

$$e) \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x^2-3x+2} =$$

$$f) \frac{a+b}{a-b} + \frac{a}{b-a} + \frac{b^2}{a^2-b^2} =$$

$$g) \frac{9-13x-13x^2}{x^3+x^2-12x} + \frac{x-3}{x+4} + \frac{x+4}{x-3} =$$

$$h) \frac{a}{a^2b-2ab^2+b^3} + \frac{a}{a^2b-b^3} + \frac{b}{a^3-a^2b} =$$

5.- Sustracción de fracciones algebraicas

$$a) \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} =$$

$$b) \frac{2x}{x+3} - \frac{x-4}{3+2x} =$$

$$c) \frac{4x-m}{x-m} - \frac{x+3m}{x^2-m^2} =$$

$$d) \frac{5x+2}{9-4x^2} - \frac{x-1}{3+2x} =$$

$$e) \frac{x+5}{2x-4} - \frac{3-x}{x^2-4} - \frac{3x}{x+2} =$$

$$f) \frac{4-x}{5-3x} - \frac{3}{25-9x^2} - \frac{x-5}{5+3x} =$$

6.- Multiplicación de fracciones algebraicas

$$a) \frac{3ab^2}{9ab} \cdot \frac{4xy}{2x^2} = \quad b) \frac{2a+a^2}{2x^2+xy} \cdot \frac{4x^2-y^2}{4+4a+a^2} = \quad c) \frac{3a(x-y)^2}{3a^2(x-y)} \cdot \frac{5x(x+y)^2}{x^2(x^2-y^2)} =$$

$$d) \frac{x^2-y^2}{x-y} \cdot \frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} = \quad e) \frac{y^2-x^2}{x^2+xy} \cdot \frac{3x}{x-y} = \quad f) \left(\frac{3}{y} - \frac{3x^2}{2} \right) \cdot 4xy =$$

$$g) \frac{x+y}{x} \cdot \frac{x^2-xy}{2y^2} = \quad h) \frac{a^2-a-2}{a+3} \cdot \frac{a^2+2a-3}{(a-2)^3} \cdot \frac{(a-2)^2}{a^2-1} = \quad i) \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} =$$

7.- División de fracciones algebraicas:

$$a) \frac{4x^2}{5ay^2} : \frac{3ax^3}{5y} = \quad b) \frac{3x^2}{x-y} : \frac{x^2-x}{x^2-y^2} = \quad c) \frac{(a-1)^2}{x^2-1} : \frac{a^2-1}{(x-1)^2} =$$

$$d) \left(\frac{2x-8x^2}{16x^2-1} \cdot \frac{16x^2+8x+1}{6x} \right) : \frac{4x-16x^2+2}{24x^2-12x} = \quad e) \left(x + \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} \right) : \frac{2(x^2-1)}{3x} =$$

$$f) \left[\left(\frac{x}{y} - y \right) \left(\frac{x}{y} + y \right) \right] : \left(\frac{x}{x^2-y^4} - \frac{1}{x-y^2} \right) = \quad g) \left(\frac{x^2-6x+9}{x^2-x} : \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x+4} \right) : \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1} =$$

TEMA 4: ECUACIONES

1.- ECUACIÓN DE PRIMER GRADO (lineal): $ax + b = 0$

2.- ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (cuadrática): $ax^2 + bx + c = 0$, cumpliendo que $x_1 \cdot x_2 = c/a$
 $x_1 + x_2 = -b/a$

Se calcula utilizando la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Demostración: $ax^2 + bx + c = 0$; $ax^2 + bx = -c$; $4a(ax^2 + bx) = -4ac$; $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$;

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac; \quad 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Casos especiales:

- $ax^2 + bx = 0$ (ej: $3x^2 + 9x = 0$)
- $ax^2 + c = 0$ (ej: $x^2 - 16 = 0$)
- bicuadradas: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ se aplica el cambio de variable $x^n = t$
 ej. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
 ej. $-x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

OJO!!!!!!!

- . La raíz par de un número positivo tiene 2 soluciones
- . La raíz par de un número negativo no tiene solución.
- . La raíz impar de un número tiene 1 solución.

Una ecuación de segundo grado se dice que está en forma canónica si el coeficiente del término de 2º grado es 1. Si una ecuación está en forma canónica el coeficiente del término de primer grado es menos la suma de las raíces y el término independiente el producto de las raíces.

$ax^2 + bx + c = 0$ pasamos a forma canónica dividiendo por $a \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$

$x^2 - Sx + P = 0$ pues :

$$S = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$P = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

3.- ECUACIÓN RACIONAL: son aquellas en las que aparecen fracciones algebraicas.

Se factorizan los denominadores (producto de expresiones irreducibles: sacar factor común o productos notables o Ruffini). Después, hallar el mcm de los denominadores y operar con los numeradores.

(Una vez resuelta la ecuación hay que comprobar que la solución satisface la ecuación)

4.- ECUACIÓN IRRACIONAL: son aquellas en las que aparecen raíces cuadradas.

- despejar en un término de la ecuación una de las raíces y en el otro todo lo demás.
- elevar al cuadrado ambos términos en "bloque".

CUIDADO!!! $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB \neq A^2 + B^2$

- operar al máximo.
- repetir el proceso si no se han eliminado todas las raíces.
- despejar x

(Una vez resuelta hay que comprobar que la solución satisface la ecuación)

5.- ECUACIÓN EXPONENCIAL (ver pag. 57):

- **Tipo 1**(función exponencial multiplicando o dividiendo):

Se calcula escribiendo ambos lados de la ecuación en potencias de la misma base para poder igualar los exponentes: ej. $3^{x-2} = 27$

(cuando las bases de las potencias igualadas no coinciden se aplica en ambos términos de la ecuación la operación de logaritmo)

- **Tipo 2** (suma o resta de funciones exponenciales):

Se realiza un cambio de variable que más tarde se deshace para obtener el resultado:

ej. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+2} = 93$

6.- ECUACIÓN LOGARÍTMICA (ver página 58):

$$\log_a b = \log_a x \iff b = x, \text{ o también, } \log_a b = x \iff a^x = b$$

(Una vez resuelta hay que comprobar que la solución satisface la ecuación)

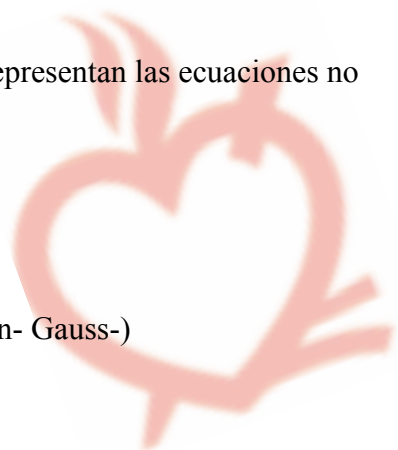
7.- SISTEMAS DE ECUACIONES (en especial el método de Gauss):

- **Compatible determinado** (una única solución) pues las ecuaciones son linealmente independientes y su nº coincide con el nº de incógnitas)
ej. $x+y+z = 1$
 $2x-y-3z = 0$
 $-x+2y-2z = -5$
- **Compatible indeterminado** (infinitas soluciones) pues las ecuaciones no son linealmente independientes- es decir, alguna ecuación es combinación de las otras-)
ej. $x+y+z=14$
 $2x-y+2z=25$
 $-x+2y-z= -11$
- **Incompatible** (no existe solución) pues las condiciones que representan las ecuaciones no pueden darse a la vez.
ej. $x+y-2z = 0$
 $2x-3y+z=0$
 $-3x-3y+6z=10$

8.- SISTEMAS LINEALES

(métodos de resolución: gráfico, sustitución, igualación, reducción- Gauss-)

9.- SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES



Ejercicios de ecuaciones:

1.- Resolver las ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{2x+3} = x$ b) $\sqrt{x^2-1} = 1$ c) $x = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ d) $18 - \sqrt{x+10} = 2$

e) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-3} = 6$ f) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = 1$ g) $\sqrt{3x-2} - 4 = 0$

h) $2\sqrt{2x-1} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9}$ i) $\frac{21}{\sqrt{6x+1}} - \sqrt{6x+1} = 2\sqrt{3x}$

j) $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2x}$

2.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

d) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ e) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ f) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

3.- Resolver los siguientes sistemas no lineales:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 290 \\ x + y = 24 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ x + y = 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2(x+y) \\ y - x = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0 \\ y = 1 + 2x \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \\ x = 3y - 1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 13 \\ xy + 3 = 0 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11 \\ xy = 2 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + 2y^2 = 22 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -6 \\ 4x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} 2(x+2y)^2 - (2x+y)^2 = -14 \\ x - y = 5 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2} \\ x + y = 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3 - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{y+3}{y+1} \\ 3x+1 = 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} \frac{x^2-3x+4}{y^2-2y+3} = \frac{1}{3} \\ 7x-2y = 1 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - y^2 = 2 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 27 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

4.- Resolver los siguientes sistemas lineales:

$$1.a) \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -y - z = -2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$1.b) \begin{cases} x + 3y + 2z = 14 \\ -2x - 5y - z = -19 \\ 2x + 6y + 5z = 30 \end{cases}$$

$$2.a) \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$2.b) \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ 2x - y - z + t = 2 \\ 3x + 2y + z - 2t = 7 \\ 3y + 2t = 12 \end{cases}$$

$$3.a) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y - z = 3 \\ 4x - 5y - z = 9 \end{cases}$$

$$3.b) \begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ 7x + 5y - z = 17 \\ 3x - y + z = -21 \end{cases}$$

$$3.c) \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x + y - 7z = 3 \end{cases}$$

$$4.a) \begin{cases} x + y = 7 \\ x - 3y = -1 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

$$4.b) \begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \\ x - 7y - 18z = 1 \end{cases}$$

$$4.c) \begin{cases} x + y = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$4.d) \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{2} \\ -3x + y + 2z = -7 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$5.a) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$5.b) \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ -4x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$6.a) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ 4x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$6.b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = -4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$6.c) \begin{cases} x + 2y - 2z = 10 \\ 4x - y + z = 4 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x - 3y = -11 \end{cases}$$

$$6.d) \begin{cases} x - 2y + 3z - 2t = -9 \\ y - z + 2t = 5 \\ x + 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$7.- \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$



5.- Resolver los sistemas:

$$\begin{array}{lll}
 1.a) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 3x + 5y - 2z = 7 \\ 4x - y + 7z = 23 \end{cases} & 1.b) \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 2z = 9 \\ 3x + 5y - 6z = -8 \end{cases} & 1.c) \begin{cases} 4x - 5y + 2z = -7 \\ 7x + 2y - 4z = 5 \\ 5x - 4y + 3z = -1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 2.a) \begin{cases} 4x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases} & 2.b) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 9y - z = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases} & 3.c) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 61 \\ 3x + 2y + z = 54 \\ 5x - 2y + 3z = 58 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 2.d) \begin{cases} 3x + 4y - 5z = -20 \\ 2x - 5y + z = 15 \\ x + 3y + 3z = 4 \end{cases} & 2.e) \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -4 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 2y + 7z = 30 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 3.a) \begin{cases} x - 2y + 3z = 13 \\ x + 3y + 4z = 11 \\ x + y + z = 4 \end{cases} & 3.b) \begin{cases} z - 2(x + y) = -9 \\ 3x - y = 3 \\ 3y - z = 9 \end{cases} & 3.c) \begin{cases} 3z - 4x = -1 \\ 6y - 3x = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3.d) \begin{cases} x + 4y + 3z = 17 \\ 3x + 3y + z = 16 \\ 2x + 2y + z = 11 \end{cases} & 3.e) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 7 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones ejercicio 3:

$$1) x = 13, y = 11; \quad x = 11, y = 13 \quad 2) x = 0, y = 3; \quad x = \frac{12}{5}, y = -\frac{9}{5} \quad 3) (-3, -4), (3, 4)$$

$$4) (2, 3), \left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad 5) \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (2, 3) \quad 6) (3, 2), (2, 3) \quad 7) (-3, -5), (1, 3)$$

$$8) (2, 1), \left(1, \frac{2}{3}\right) \quad 9) (3, -1), (3, 1) \quad 10) (-2, -1), (2, 1) \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$11) (-2, -3), (-2, 3), (2, -3), (2, 3) \quad 12) (-\sqrt{3}, -2), (-\sqrt{3}, 2), (\sqrt{3}, -2), (\sqrt{3}, 2)$$

$$13) (7, 2), (3, -2) \quad 14) (3, -1), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad 15) (2, 1), \left(-\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}\right) \quad 16) (1, 3), \left(-\frac{31}{37}, -\frac{127}{37}\right)$$

$$17) \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right), (1, -1), (-1, 1) \quad 18) (-1, -1), (1, 1)$$

$$19) (-6, -3), (6, 3), \left(\pm \frac{9\sqrt{6}}{4}, \pm \frac{3\sqrt{6}}{4}\right) \quad 20) (-2, -4), (2, 4), (\sqrt{10}, \sqrt{10}), (-\sqrt{10}, -\sqrt{10})$$

$$21) (1, 0), (1, -2), \left(2, \frac{6 - \sqrt{42}}{3}\right), \left(2, \frac{6 + \sqrt{42}}{3}\right) \quad 22) \left(\sqrt{\frac{19}{10}}, \sqrt{\frac{19}{10}}\right), \left(-\sqrt{\frac{19}{10}}, -\sqrt{\frac{19}{10}}\right), (2, -5), (-2, 5)$$

$$23) (3, -1), (-3, 1), (-1, 3), (1, -3)$$

Soluciones ejercicio 4:

- 1.a) $x=1$ $y=1$ $z=1$; 1.b) $x=1$ $y=3$ $z=2$
2.a) $x=4$ $y=3$ $z=2$; 2.b) $x=2$ $y=2$ $z=3$ $t=3$
3.a) $S:(1-t, -1-t, t)$ 3.b) $S:(-4, 9, 0)$ 3.c) $S:$ Incompatible
4.a) $x=5$ $y=2$; 4.b) $(5+13t/5, -11t/5, t)$;
4.c) $(-t, t, -3t)$; 4.d) Incompatible
5.a) $(0, 0, 0)$; 5.b) $(0, 0, 0)$
6.a) $(1, 1, 1)$; 6.b) $(-4/5, -6/5, 2)$;
6.c) $(2, 3, -1)$; 6.d) $(-3a+2, -a+4, a-1, a)$
7.- $(4, 3, 2)$

Soluciones ejercicio 5:

- 1.a) $x=1, y=2, z=3$ 1.b) $x=1, y=-1, z=1$ 1.c) $x=1, y=3, z=2$
2.a) $x=2, y=-2, z=1$ 2.b) $x=3, y=\frac{2}{3}, z=5$ 2.c) $x=12, y=7, z=4$
2.d) $x=1, y=-2, z=3$ 2.e) $x=1, y=2, z=3$
3.a) $x=2, y=-1, z=3$ 3.b) $x=3, y=6, z=9$ 3.c) $x=\frac{7}{9}, y=\frac{5}{9}, z=\frac{19}{27}$
3.d) $x=2, y=3, z=1$ 3.e) $x=1, y=3, z=2$



PROBLEMAS DE PLANTEO

Problemas de números

- 1.- El doble de un número es igual a 38. ¿De qué número se trata?
- 2.- Al sumar seis unidades al triple de un número, se obtiene 33, ¿Qué número es?
- 3.- La suma de dos números consecutivos es 121 ¿Qué números son?
- 4.- Calcula un número cuya tercera parte, sumada con el doble de ese número, es igual a 14.
- 5.- Si a un número se le suma su tercera parte, se obtiene 148. ¿Cuál es ese número?
- 6.- Dos números suman 100, y el mayor supera al menor en 10 unidades. Calcula los dos números.
- 7.- Calcula un número cuya tercera parte, sumada con el triple de ese número dé como resultado 40.
- 8.- Halla dos números impares consecutivos cuya suma sea 80.
- 9.- Una fracción (razón de dos números) es equivalente a $\frac{3}{4}$, Si se suman 10 unidades al numerador y 10 al denominador, la fracción que resulta es equivalente a $\frac{11}{14}$. Halla la fracción.
- 10.- Si sumamos 5 unidades al doble de un número el resultado es el mismo que si le sumamos 7 unidades. ¿Cuál es el número?
- 11.- La suma de tres números naturales consecutivos es 84. Halla dichos números.
- 12.- La suma de dos números es 24, y el doble del primero menos el segundo es 6, ¿Cuáles son estos números?
- 13.- Descompón el número 1000 en dos números de manera que al dividir el mayor entre el menor el cociente sea 2 y el resto 220.
- 14.- Una fracción es equivalente a $\frac{3}{5}$, y, si aumentamos el denominador una unidad y disminuimos el numerador en dos unidades, la nueva fracción es equivalente a $\frac{4}{11}$. ¿De qué fracción se trata?
- 15.- Dividir el número 77 en dos partes de modo que una de ellas dividida por la otra dé un cociente de 2 y un resto de 2.
- 16.- ¿Qué número hay que sumar a la fracción $\frac{11}{5}$ para obtener las $\frac{3}{5}$ partes del número que se ha sumado?
- 17.- La suma de dos números impares consecutivos es 104 ¿Cuáles son los dos números?
- 18.- Los cuadrados de dos números consecutivos se diferencian en 23 unidades. ¿Cuáles son los dos números?
- 19.- Si aumentamos en ocho unidades el quíntuplo de un número, obtenemos 7 veces ese número. ¿Cuál es?
- 20.- Si sumamos los números anterior y posterior a uno dado, y lo dividimos todo entre dos, obtenemos el mismo número. ¿Qué número es?
- 21.- La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 9 ¿Cuales son los dos números?
- 22.- Los dos tercios de un número exceden en dos unidades a la mitad de ese número, ¿Cuál es?
- 23.- Lucia le dice a Gema: “Piensa un número, ¿ya lo tienes? Vale, ahora multiplícalo por 4 y súmale después 6. ¿De acuerdo? Calcula sus tres medios y dime lo que te sale”. Gema le responde que el número obtenido es el 33 ¿En qué número pensó Gema?
- 24.- Las dos cifras de un número suman 12. Si se suman 48 unidades al cuadrado de dicho número se obtiene un tercio del cuadrado del número que resulta de invertir el orden de las cifras del primero ¿Cuál es ese número?
- 25.- Las dos cifras de un número suman 11 y el producto de dicho número por el que se obtiene de invertir el orden de las cifras es 3154 ¿Cuál es ese número?
- 26.- Halla dos números cuya suma es 175, y 5 veces el menor es igual al mayor aumentado en 11.
- 27.- Divide 65 en dos partes, de modo que la mayor tenga dos unidades más que el duplo de la menor.
- 28.- Halla la fracción que vale $\frac{1}{3}$ cuando se añade uno al numerador, y que vale $\frac{1}{4}$ si se añade uno al denominador.

- 29.- El triple de un número más el cuádruple de otro es 10 y el cuádruple del primero más el segundo es nueve ¿Qué números son?
- 30.- Encuentra dos números cuya suma sea igual a 100 y su diferencia 46
- 31.- Divide el número 38 en dos partes, de modo que la suma del duplo del mayor con 8 veces el menor sea igual a 100.
- 32.- La suma de dos números es 50. Calcula dichos números si siete veces el menor es igual al duplo del mayor disminuido en uno
- 33.- Un número excede en tres unidades al duplo de otro. La diferencia entre cinco veces el menor y el duplo del mayor es igual al cuarto. Calcula ambos números.
- 34.- Halla un número cuyas dos cifras suman 11 y sabiendo que si se escribe invirtiendo el orden de sus cifras, el número disminuye en 63 unidades.
- 35.- Un número de dos cifras es igual al triple de la suma de dichas cifras más tres. Si se invierte el orden de sus cifras, el número que resulta vale el séptuplo de la suma de sus cifras más nueve ¿Cuál es el número dado?
- 36.- Halla dos números, sabiendo que están en la proporción de cinco a tres y que si se restan 10 del primero y se aumentan 10 al segundo la proporción en que se hallan es inversa de la anterior.
- 37.- Halla dos números tales que si se divide el primero por cinco y el segundo por cuatro, la suma de los cocientes es 6; y si se multiplica el primero por tres y el segundo por dos la suma de los productos es 69.
- 38.- La suma de dos números es 21. si de ocho veces el primero más el segundo se resta ocho veces el segundo más el primero, la diferencia es 63. ¿Cuáles son esos números?
- 39.- Un número está formado por dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de colocación de las cifras, resulta otro número que es igual a cuatro veces el primero más 9 ¿De qué número se trata?
- 40.- La suma de un número más su inverso es $\frac{37}{6}$ Halla el número

Problemas de edades

- 1.- La suma de las edades de cuatro hermanos es 34 años. Averigua la edad de cada uno sabiendo que se llevan, consecutivamente, tres años cada uno.
- 2.- Un hijo tiene 25 años menos que su padre. Dentro de 10 años la edad del padre será doble de la edad del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?
- 3.- Un padre tiene 38 años y su hijo 10. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será tres veces la de su hijo?
- 4.- Un hijo tiene 30 años menos que su padre y éste tiene cuatro veces la edad de su hijo, ¿Qué edad tiene cada uno?
- 5.- Las tres cuartas partes de la edad de Luis, más sus seis quintas partes nos da como resultado un año menos que el doble de su edad. ¿Qué edad tiene?
- 6.- Hace 10 años la edad de Alicia era la mitad de la de Santiago, pero hoy en día, la edad de Santiago es los $\frac{16}{9}$ de la de Alicia. ¿Cuáles son las dos edades?
- 7.- La edad de un alumno es el triple de la que tenía hace 8 años. ¿Cuál es esa edad?
- 8.- La edad de una madre es triple de la de su hijo, Dentro de 10 años su edad será del doble. ¿Qué edad tiene cada uno?
- 9.- La suma de las edades de dos hermanos es 18 años. Si uno de ellos tiene doble edad que el otro ¿Cuántos años tiene cada uno?
- 10.- Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si entre los dos suman 48 años ¿Cuántos años tiene cada uno?
- 11.- Dentro de tres años, la edad de Juan será el triple de la de Cristina, y hace dos años la edad de Cristina era la octava parte de la de Juan ¿Cuántos años tiene cada uno?

12.- Un padre tenía 25 años cuando nació su hijo. La media geométrica de las edades de ambos supera en 10 al número de años del hijo. Halla las edades actuales de los dos.

13.- La suma de las edades de un padre y de su hijo es de 42 años. Dentro de nueve años la edad del padre será tres veces la del hijo. ¿Qué edad tienen ahora el padre y el hijo?

Problemas de geometría

1.- La proyección de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa mide 54 cm y la suma de la altura con la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa mide 60 cm. ¿Calcula dicha proyección?

2.- El perímetro de un triángulo rectángulo mide 90 m y el cateto mayor, 3 m menos que la hipotenusa. Halla los tres lados del triángulo.

3.- Determina las dimensiones de un rectángulo cuya superficie mide 8 m^2 , sabiendo que una diagonal mide $2\sqrt{5} \text{ m}$.

4.- La razón entre los lados de dos cuadrados es tres y la suma de los cuadrados de sus diagonales es 100 cm^2 . Averigua dichos lados.

5.- Tres segmentos miden, respectivamente, 8, 22 y 24 cm. Si se añade a los tres una misma longitud, el triángulo construido con ellos es rectángulo. Halla dicha longitud.

6.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm. Averigua las longitudes de los catetos sabiendo que su diferencia es 7 cm.

7.- Si se aumenta la longitud de un cuadrado en cuatro metros, y la anchura en $1'5 \text{ m}$, resulta un rectángulo cuya área es igual a la del cuadrado aumentada en 28 m^2 . Calcula el lado del cuadrado.

8.- Calcula la medida de los lados de un rectángulo tal que si se aumenta la base en 5 m y se disminuye la altura en 5 m, el área no varía, pero si se aumenta la base en 5 m y se disminuye la altura en 4 m, el área aumenta en 4 m^2 .

Problemas varios:

1.- Queremos repartir un dinero entre varios chicos. Si damos 10€ a cada uno sobran $1'5 \text{ €}$, mientras que si les damos $12'5 \text{ €}$ faltan $3'5 \text{ €}$. ¿Cuántos chicos hay? ¿Cuánto dinero tenemos?

2.- Beatriz se ha gastado 345 € al comprar una cazadora para Juan y otra para Laura. La de Juan costó 35 € más que la de Laura. ¿Cuánto costó cada una?

3.- Calcula el número de ovejas de un redil sabiendo que se han contado 348 patas.

4.- El tronco de un gato mide de largo $\frac{1}{2}$ de su longitud total y la cabeza mide igual que la cola, 6 cm. ¿Cuánto mide el gato?

5.- Un poste de teléfono tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su longitud y la parte exterior mide 8 m. ¿Cuánto mide en total el poste?

6.- Un grupo de amigos prepara un fondo común de 1000€ para organizar la acampada de las vacaciones. A última hora, algunos amigos no pueden ir al campamento, por lo que los 10 amigos que van a asistir deben pagar $37'5 \text{ €}$ más. ¿Cuántos amigos pensaban irse de vacaciones al principio?

7.- Una empresa de alimentación ofrece a sus clientes dos tipos de cesta de Navidad, la especial y la extra. La extra cuesta el doble que la especial, pero, si no tenemos en cuenta el coste de la cesta (25 €), la especial costaría tres veces menos que la extra. ¿Cuánto vale cada cesta?

8.- Julia e Iván van de compra. A Julia le gustan los yogures de frutas que se venden en paquetes de 2 unidades, mientras que Iván prefiere los desnatados que se venden en paquetes de 4 unidades. Si entre los dos han comprado 15 paquetes de yogures, que son 44 unidades, ¿cuántos yogures ha comprado cada uno?

- 9.- Diez vecinos de un barrio, dueños de coches y motos, encuentran todas las ruedas pinchadas, En el taller les dicen que hay que cambiar en total 34 neumáticos. ¿Cuántas motos y cuántos coches había?
- 10.- La caja de un despacho de aceite arroja al día el siguiente resultado: 820 botellas vendidas, 2730 € ingresados. Si en ese despacho se vende la botella de aceite de 1º a 3'1 € y la de 0'4º a 3'6 €, ¿Cuál es el número de botellas que se han vendido de cada clase?
- 11.- Tres amigos tienen en total de 1260 € El primero tiene doble cantidad que el segundo, y éste el triple que el tercero ¿Cuánto dinero tiene cada uno?
- 12.- Escribe una ecuación de segundo grado, suponiendo que la media aritmética de sus raíces es -5 y su media proporcional 4.
- 13.- En un recorrido de 150 Km, un ciclista llegaría dos horas y media antes si llevase una media de 5 km más por hora. Averigua el tiempo que tarda en el recorrido.
- 14.- Un barquero sube por un río 1800 m. Para bajar emplea 9 minutos menos que para subir, pues la corriente aumenta la velocidad en 100 metros por minuto respecto a la velocidad que llevaba al subir ¿Cuál es el tiempo que emplea en subir? ¿Y en bajar?
- 15.- Dos grifos vierten a la vez en un depósito y tardan dos horas en llenarlo. ¿Cuánto tiempo empleará cada grifo en llenar dicho depósito si se sabe que el segundo tarda tres horas más que el primero en llenarlo?
- 16.- Al mezclar dos líquidos, se obtiene un volumen de 5 litros cuya densidad es de 0'85 kg por litro. Averigua el volumen de cada uno de los líquidos que se han mezclado, sabiendo que sus densidades son 0'7 y 1'2 kg por litro, respectivamente.
- 17.- Si mezclamos un tipo de café de 5'76 € por kg con otro de 7'44 € por kg, conseguimos 24 kg de café que se vende a 6'46 € por kg ¿Qué cantidad de cada clase de café se ha mezclado?
- 18.- Tenemos dos capitales de 30 000 y 70 000 de €, depositados a distintos réditos, que juntos producen 4 300 € cada año. Si los réditos se invierten, los intereses de un año suman 4 700 € Halla los dos réditos
- 19.- Un buque navega a razón de 20 km por hora en un río cuando lleva la dirección de la corriente. Si va en dirección contraria a la corriente, recorre 12 km por hora. Halla la velocidad del agua del río y la del buque en agua tranquila.
- 20.- Disponemos de dos clases de billetes. Cinco billetes de la primera clase y veinte de la segunda suman 300€; cuatro billetes de la primera y cuatro de la segunda suman 120€. ¿Cuál es el valor de un billete de cada clase?
- 21.- Dos personas han hecho una apuesta de 20 €. Si gana la primera, tendrá, después de cobrar los 20€, el triple dinero que la segunda. En el caso contrario, las dos tendrán igual. ¿Cuántos euros tenía cada una antes de hacer la apuesta?





TEMA 5: INECUACIONES

Estudiar el signo de una expresión algebraica es ver para que números reales la expresión es mayor ($>$), menor ($<$), mayor o igual ($\geq$) o menor o igual ($\leq$) que cero, o lo que es lo mismo: resolver la inecuación.

Se trabaja igual que con las ecuaciones (lo que está sumando pasa al otro lado restando, lo que está multiplicando pasa dividiendo,...) EXCEPTO si paso **multiplicando o dividiendo un nº negativo**, caso en que el $>$ se convierte en menor y viceversa (ej: $10 > -2x$; $-5 < x$).

PASOS A SEGUIR:

1. Se pasa todo a un lado de la inecuación y al otro se deja 0.
2. Se opera al máximo.
3. Se transforma la inecuación en ecuación y se sacan las raíces de esta última.
(cuidado: ver el procedimiento en inecuaciones fraccionarias)
4. Se colocan las raíces en la recta real.
5. Se estudia el signo de los intervalos en los que se ha dividido la recta real (sustituyendo valores en la inecuación simplificada).
6. Se escogen como solución los intervalos cuyo signo coincida con el que marca la inecuación ($>$, $<$, $\leq$, $\geq$).

TIPOS DE INECUACIONES:

1. I. lineal (grado 1) con una incógnita:
Ej: $5x+6-x/2 > -1$
Ej: $8x-6 < 2x/5$
2. I. de grado superior con una incógnita:
Ej: $2x^2-12x+16 > 0$
Ej: $x^4+x^3-9x^2-9x \geq 0$
3. I. fraccionarias: Se procede siguiendo los pasos explicados anteriormente salvo:
 - Para operar al máximo, haré mcm de los denominadores. Después, no puedo eliminar los denominadores que contengan x ya que no conozco el signo de dicha expresión.
 - Coloco en la recta real las raíces del numerador y del denominador, o lo que es lo mismo resolveremos la ecuaciones $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$.
 - No podré elegir como valores de la solución aquellos que anulen el denominador.
ej: $\frac{x^2-9}{x-1} \geq 0$
4. I. lineal con dos incógnitas: $ax+by < c$. Da como solución un semiplano, en vez de un intervalo.
 - Resolveremos la ecuación asociada gráficamente, es decir representaremos gráficamente la recta $ax+by = c$
 - Estudiaremos el signo en los distintos semiplanos que aparecen al dibujar la recta, bien a tanteo o bien por la regla de los signos: Puesta la inecuación $ax+by+c > 0$ o bien
 - $ax+by+c \geq 0$, el signo del semiplano superior es el signo del coeficiente de y.
 - Tomamos como solución el semiplano cuyo signo coincide con el que nos pide el problema.

5. Sistemas de inecuaciones:

Se resuelve cada una de las inecuaciones por separado (como hemos explicado anteriormente), y luego se hace la intersección de las soluciones obtenidas (la solución de un sistema es el conjunto de números que satisfacen todas las condiciones que plantea el sistema, es decir, números comunes a todas las soluciones)

$$\text{Ej: } \begin{cases} 2x - 3 > x - 2 \\ 3x - 7 < x - 1 \end{cases}$$

Ejercicios de inecuaciones:

1.- Resolver las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - 7x - 18 < 0 & \text{b) } 6 - 5x - x^2 > 0 & \text{c) } 12x^2 - 11x + 2 > 0 \\ \text{d) } 2x^2 - 7x < 0 & \text{e) } 9 - 4x^2 < 0 & \text{f) } 6 - 3x^2 + 7x > 0 \\ \text{g) } 2x(x-3) > 3x^2 & \text{h) } x^2 - 6 < 5x & \text{i) } x - 2x^2 \geq 0 \\ \text{j) } \frac{(x-1)(x-2) + (x^2-1)}{5} \leq 4(1-x) & \text{k) } \frac{(2x+3)(x-1)}{3} + \frac{1+x}{2} > \frac{(x-1)^2 + 12}{4} \end{array}$$

$$\text{l) } x^2 + 5 \geq 0 \quad \text{m) } x^2 - 2x + 1 \leq 0 \quad \text{n) } x^2 + 4x + 4 > 0 \quad \text{o) } x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

2.- Resolver las siguientes inecuaciones fraccionarias:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{x-4}{x+2} \geq 0 & \text{b) } \frac{x-5}{x+5} \leq 0 & \text{c) } \frac{2x-5}{x+2} \leq 0 & \text{d) } 1 - \frac{x}{x-5} < 0 \\ \text{e) } \frac{3}{1-x} > \frac{2}{1+x} & \text{f) } \frac{x^2-9}{x-1} \geq 0 & \text{g) } \frac{x^2-3x+2}{x+3} \geq 0 & \text{h) } \frac{(x+3)\left(x-\frac{2}{5}\right)}{4-x} \leq 0 \\ \text{i) } \frac{(x-3)(x+3)x}{(2-x)(x+1)} \leq 0 & \text{j) } \frac{(x-4)(x-2)(1-x)}{(x+3)(x+1)} \geq 0 & & \end{array}$$

3.- Resolver las siguientes inecuaciones de grado superior:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^3 - 5x^2 + 6x > 0 & \text{b) } (x+3)(2+x)(x-1) < 0 & \text{c) } x^3 + x^2 - 9x - 9 \geq 0 \\ \text{d) } 4x + 20 - x^3 - 5x^2 \leq 0 & \text{e) } (x+3)(x-1)(x-4) > 0 & \text{f) } (x^2 - 7x + 12)(2-x) < 0 \\ \text{g) } (x^2 + 5x + 4)(x^2 - 4) \geq 0 & \text{h) } (1-x^2)(x^2 - 9) \leq 0 & \end{array}$$

4.- Resolver las siguientes inecuaciones con dos incógnitas:

$$\text{a) } x - y + 3 > 0 \quad \text{b) } 2x + y - 6 < 0 \quad \text{c) } 3x - y \leq 6 \quad \text{d) } x + 2y - 6 \geq 0$$

5.- Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3 > x - 2 \\ 3x - 7 < x - 1 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + 3(x - 1) < x + 1 \\ 2(x + 3) > x + 2 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 5x > 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} x^2 - x - 2 > 0 \\ 12 + x - x^2 \leq 0 \end{array} \right\} \\
 \text{e) } 2x + 1 < 5x - 2 < 3x + 4 & \text{f) } \frac{x+2}{3} < \frac{3x-3}{4} < \frac{x+1}{2} & \text{g) } |x-3| \leq 4 & \text{h) } |3x+7| \leq 1 \\
 \text{i) } \left| \frac{x-3}{x} \right| \leq 5 & \text{j) } \left. \begin{array}{l} \frac{2x^2 + x - 1}{x+1} < \frac{x-6}{2} + 4 \\ x^2 - 4 > 0 \end{array} \right\} & \text{k) } \left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + (x+2)^2 > \frac{(2x-3)^2}{2} \\ (2x+1)^2 - (x-3)^2 < 3(x+2)^2 \\ \frac{x-1}{3} + 1 > x \end{array} \right\}
 \end{array}$$



TEMA 6: TRIGONOMETRÍA

1.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

Llamamos razones trigonométricas a las razones entre las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo. Son las siguientes:

- En un triángulo rectángulo en A, el seno de un ángulo B es igual a la longitud del cateto opuesto dividido por la longitud del hipotenusa:

$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto opuesto a } B}{\text{hipotenusa}}$$

- En un triángulo rectángulo en A, el coseno de un ángulo B es igual a la longitud del cateto adyacente o contiguo dividido por la longitud del hipotenusa:

$$\text{cos } B = \frac{\text{cateto adyacente a } B}{\text{hipotenusa}}$$

- En un triángulo rectángulo en A, la tangente de un ángulo B es igual a la longitud del cateto opuesto dividido por la longitud del cateto adyacente o contiguo:

$$\text{tg } B = \frac{\text{cateto opuesto a } B}{\text{cateto adyacente a } B}$$

- En un triángulo rectángulo en A, la cosecante de un ángulo B es igual a la longitud de la hipotenusa dividida por la longitud del cateto opuesto. Coincide con el inverso del seno:

$$\text{cosec } B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } B} = \frac{1}{\text{sen } B}$$

- En un triángulo rectángulo en A, la secante de un ángulo B es igual a la longitud de la hipotenusa dividida por la longitud del cateto contiguo. Coincide con el inverso del coseno:

$$\text{sec } B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } B} = \frac{1}{\text{cos } B}$$

- En un triángulo rectángulo en A, la cotangente de un ángulo B es igual a la longitud del cateto contiguo dividido por la longitud del cateto opuesto. Coincide con el inverso de la tangente:

$$\text{ctg } B = \frac{\text{cateto adyacente a } B}{\text{cateto opuesto a } B} = \frac{1}{\text{tg } B}$$

Razones trigonométricas de un ángulo central

Con estas definiciones parece que solamente tengan razones trigonométricas los ángulos agudos pero podemos definir razones trigonométricas para cualquier ángulo de la forma siguiente:

Consideramos una circunferencia de radio r centrada en el origen de coordenadas. Tomamos como origen de los arcos el punto donde corta la circunferencia al eje OX y el movimiento positivo en sentido contrario a las agujas del reloj.

Si A es un punto sobre la circunferencia que tiene de coordenadas (x,y), las cuales corresponden con las proyecciones del radio, de extremo el punto A, sobre los ejes de coordenadas. Notamos que el radio y dichas proyecciones forman un triángulo rectángulo. De acuerdo con esto y atendiendo a las definiciones trigonométricas anteriores, podemos decir que las razones del ángulo central que corresponde con el arco de extremo el punto A son:

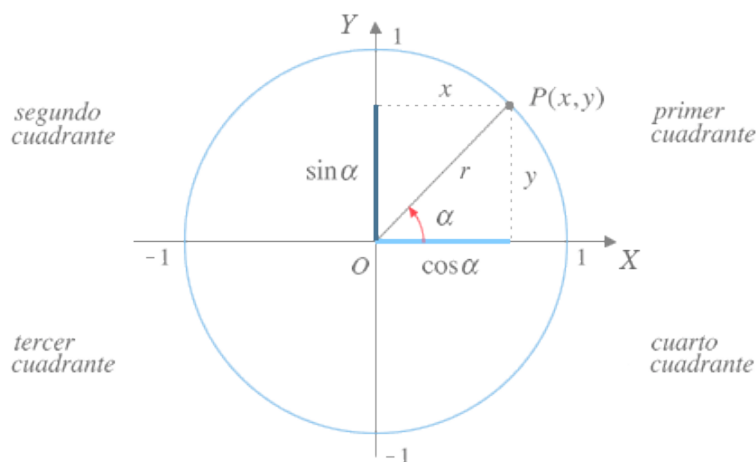
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\text{Ordenada de } A}{\text{radio}} = \frac{y}{r} & \text{cos } \alpha &= \frac{\text{abscisa de } A}{\text{radio}} = \frac{x}{r} & \text{tg } \alpha &= \frac{\text{ordenada de } A}{\text{abscisa de } A} = \frac{y}{x} \\ \text{cosec } \alpha &= \frac{\text{radio}}{\text{Ordenada de } A} & \text{sec } \alpha &= \frac{\text{radio}}{\text{abscisa de } A} & \text{ctg } \alpha &= \frac{\text{abscisa de } A}{\text{ordenada de } A} \end{aligned}$$

Observaciones

Llamamos circunferencia goniométrica a la que tiene el centro en el origen de coordenadas, radio 1, el origen de arcos en el punto (1,0), y sentido de arcos positivo si es contrario al movimiento de las agujas del reloj. En esta circunferencia el seno del ángulo central se identifica con la ordenada del extremo del arco correspondiente y el coseno con su abscisa.

El signo de las razones goniométricas del ángulo central coincide con el signo que tienen la abscisa y la ordenada del punto extremo del arco.

Por su definición los valores que pueden tomar las razones están dentro de los intervalos que se indican: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $\sec \alpha \geq 1$ o $\sec \alpha \leq -1$; $\operatorname{cosec} \alpha \geq 1$ o $\operatorname{cosec} \alpha \leq -1$; la $\operatorname{tg} \alpha$ y la $\operatorname{cotg} \alpha$ toman cualquier valor;

**2.- RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA.**

Nos permite conocer el resto de razones trigonométricas de un ángulo, conociendo una de ellas.

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

dividiendo la ecuación fundamental por $\cos^2 B$ o por $\sin^2 B$ se obtienen las

$$\text{ecuaciones: } \operatorname{tg}^2 B + 1 = \frac{1}{\cos^2 B} = \sec^2 B \quad \text{o bien} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 B = \frac{1}{\sin^2 B} = \operatorname{cosec}^2 B$$

Recordar el **signo de las razones trigonométricas** dependiendo de los diferentes cuadrantes:

	1º cuadrante	2º cuadrante	3º cuadrante	4º cuadrante
seno A	+	+	-	-
cos A	+	-	-	+
tg A	+	-	+	-

Razones trigonométricas de ángulos elementales del primer cuadrante:

	0º	30º	45º	60º	90º
seno A	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0

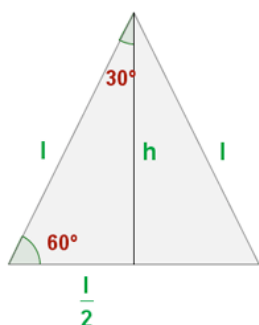
180º equivale a π radianes

3.- DEMOSTRACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30° 60° Y 45°.

Los valores numéricos de las razones trigonométricas de ciertos ángulos se pueden obtener con facilidad.

• ÁNGULOS DE 30° Y 60° :

Tengamos un triángulo equilátero (en el que todos los lados son iguales y por tanto también sus ángulos, sus ángulos miden 60°). Si trazamos la altura correspondiente a cualquiera de los lados, ésta coincide con la bisectriz del ángulo. De manera que se forma un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos es de 30° y el otro de 60°. Aplicando en este triángulo las definiciones dadas de las razones trigonométricas, junto con el teorema de Pitágoras, se obtienen todas las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.



- Por el teorema de Pitágoras, calculamos el valor de h:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2; h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}; h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4}; h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

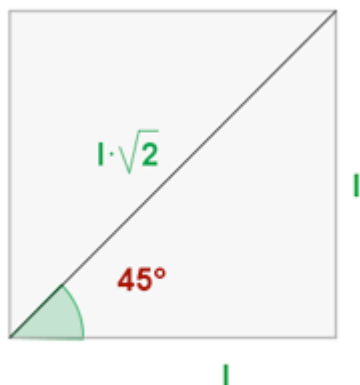
- Entonces:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• ÁNGULO DE 45° :

Tengamos un cuadrado de lado l al que le trazamos su diagonal para obtener dos triángulos rectángulos. De esta forma calculamos las razones trigonométricas del ángulo de 45°:



- Por el teorema de Pitágoras, calculamos el valor de la diagonal, que en nuestro caso es la hipotenusa del triángulo rectángulo:

$$d^2 = l^2 + l^2; d^2 = 2l^2; d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

- Entonces:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4.- RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DISTINTOS;

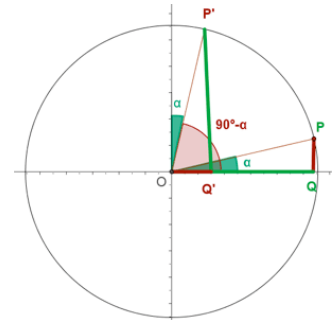
a) **Ángulos complementarios** son los que suman 90° :

si $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha$ y β son complementarios.

Conocido un ángulo α su complementario será $90^\circ - \alpha$.

Tenemos que se cumple:

- $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha$
- $\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \text{ctg} \alpha$



La explicación es porque los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios y el cateto opuesto de uno es el adyacente del otro.

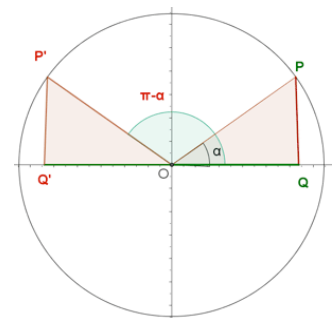
b) **Ángulos suplementarios** son los que suman 180° :

si $\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha$ y β son suplementarios.

Conocido un ángulo α su complementario será $180^\circ - \alpha$.

Tenemos que se cumple:

- $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg} \alpha$



La explicación es porque las ordenadas de los puntos de los extremos de los arcos que corresponden a sus ángulos tienen el mismo valor y signo, luego el mismo seno y las abscisas el mismo valor y signo distinto, luego cosenos opuestos.

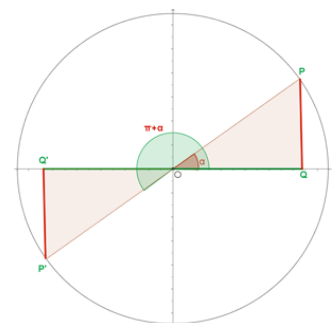
c) **Ángulos que se diferencian en 180°** son los que suman 180° :

si $\beta - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \beta$ y α se diferencian en 180° .

Conocido un ángulo α el que se diferencia en 180° con el es $180^\circ + \alpha$.

Tenemos que se cumple:

- $\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen} \alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg} \alpha$



La explicación es porque las ordenadas y las abscisas de los puntos de los extremos de los arcos que corresponden a sus ángulos tienen el mismo valor y signo distinto, luego senos y los cosenos de los ángulos son opuestos opuestos.

d) **Ángulos opuestos** son los que suman 0° o 360° o $360K$ siendo K un número entero:

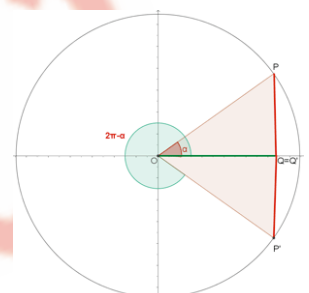
si $\alpha + \beta = 0 + 360^\circ \Rightarrow \alpha$ y β son opuestos.

Conocido un ángulo α su opuesto será $-\alpha$ o $360^\circ - \alpha$.

Tenemos que se cumple:

- $\text{sen}(-\alpha) = \text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen} \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\text{tg}(-\alpha) = \text{tg}(360^\circ - \alpha) = -\text{tg} \alpha$

La explicación es porque las ordenadas de los puntos de los extremos de los arcos que corresponden a sus ángulos tienen el mismo valor y distinto, luego los senos opuestos y las abscisas el mismo valor y signo, luego cosenos iguales.

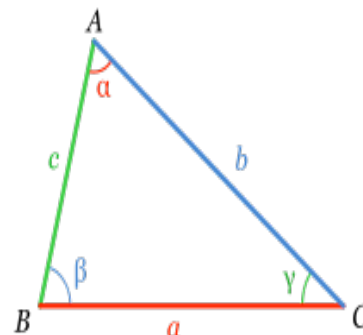


e) Las razones trigonométricas de un ángulo mayor de 360° son iguales de las del ángulo de valor el resto que resulta de dividir dicho ángulo entre 360° .

Ejemplo: $1446 : 360^\circ = 4$ de cociente y 6 de resto $\Rightarrow 1446^\circ = 360^\circ \cdot 4 + 6^\circ$ y las razones del ángulo de 1446° son las mismas que las del ángulo 6°

5.- TEOREMA DEL SENO: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$

6.- TEOREMA DEL COSENO: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos$



Ejercicios de trigonometría:

1.- Di si pueden ser verdaderas o falsas cada una de las siguientes expresiones, justificando las respuestas:

a) $\sin \alpha = 0'99$ b) $\cos \alpha = 1$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 5$ d) $\sec \alpha = 0'5$ e) $\operatorname{cotg} \alpha = -1$ f) $\cos \alpha = -2$ g) $\operatorname{tg} \alpha = -20$ h) $\cos \alpha = -1'001$ i) $\sec \alpha = -5$ j) $\operatorname{cosec} \alpha = -0'75$ k) $\operatorname{cotg} \alpha = 0'01$

2.- Halla las razones trigonométricas de los arcos cuyos extremos son los que se indican: a) A (5, -12) b) B(-6, -8) c) C(-9, 12) d) D(2, 3)

3.- ¿Qué signo tienen las razones de los ángulos siguientes?:

A = 123°, B = 222°, C = 303°, D = 197°, E = 520°, F = 85°, G = 452, H = 895

4.- Halla las razones trigonométricas de los ángulos B y C de un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es A, en los casos siguientes:

a) $b = 9$ cm y $c = 12$ cm b) $a = 30$ cm y $b = 24$ cm

5.- Calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α si:

a) $\sin \alpha = -0'6$ y $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ b) $\sin \alpha = -0'8$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

c) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ d) $\cos \alpha = 0'3$ y $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

e) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ f) $\operatorname{tg} \alpha = -0'7$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

g) $\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{1}{2}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ h) $\operatorname{cotg} \alpha = 0'8$ y $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

6.- En un triángulo isósceles, los dos ángulos iguales miden 37° y los lados iguales miden 18 cm. Calcula la base, la altura y el área del triángulo.

7.- Un poste de 6m de altura proyecta una sombra de 8 m. Si se unen el extremo superior del poste y el extremo de la sombra, calcula los elementos del triángulo formado.

8.- Una persona de 175 cm de altura, situada a una distancia de 12 m de un árbol, mira al extremo superior de éste formando un ángulo de 30° con la horizontal ¿Cuál es la altura del árbol?

9.- Un poste de 15 m de altura se sostiene verticalmente atando su extremo superior con unos cables de 25 m que lo sujetan al suelo . ¿Qué ángulos forman los cables con el poste?

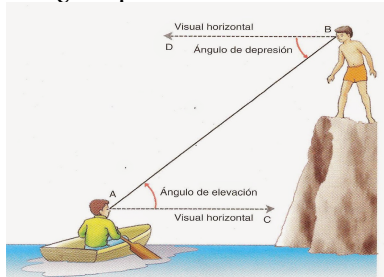
10.- ¿Cuánto miden el radio y la apotema de un pentágono regular de 20 cm de lado?

11.- Explica por qué las razones trigonométricas secante y cosecante no pueden tomar valores pertenecientes al intervalo (-1, 1)

12.- Una escalera de 3 m de longitud tiene su extremo superior apoyado sobre una tapia a 2'5 m de altura ¿Qué ángulos forma la escalera con la tapia y el suelo?

13.- Si las dos ramas de un compás forman un ángulo de 45° y su longitud es de 12 cm, halla la distancia entre las puntas de las ramas.

14.- Desde un faro, que mide 400 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco es 55° . ¿A qué distancia del faro se halla el barco?



Nota:

. Ángulo de depresión es el ángulo que se forma entre la visual de un observador que mira hacia abajo y la horizontal.

. Ángulo de elevación es el ángulo que se forma entre la visual de un observador que mira hacia arriba y la horizontal.

15.- Desde un avión, a una altura de 300 m, el ángulo de depresión de otro avión, que está a 100 m de altura, es de 39° . ¿A qué distancia se encuentran ambos aparatos?

16.- Para cualquiera de los ángulos del segundo cuadrante, ¿Cuál de las siguientes razones es mayor?: a) El seno o el coseno b) el seno o la tangente?

17.- Para cualquiera de los ángulos del tercer cuadrante, ¿Cuál de las siguientes razones es mayor?: a) El coseno o la tangente b) el seno o la tangente

18.- Para cualquiera de los ángulos del cuarto cuadrante, ¿Cuál de las siguientes razones es mayor?: a) El seno o el coseno b) el coseno o la tangente

19.- Halla los ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y que se diferencian en 180° de los siguientes ángulos:

a) $\alpha = 15^\circ$ b) $\alpha = 33^\circ$ c) $\alpha = 82^\circ$ d) $\alpha = 8^\circ$ f) $\alpha = 22^\circ 33'$ g) $\alpha = 65^\circ 27' 3''$

20.- ¿Cómo son entre sí los siguientes ángulos?

a) 15° y 165° b) 32° y 328° c) 67° y 23° d) -30° y 330° e) 46° y 226°

g) $-23^\circ 36'$ y $383^\circ 36'$ h) $\frac{\pi}{3}$ rad y $\frac{2\pi}{3}$ rad i) $\frac{\pi}{4}$ rad y $\frac{7\pi}{4}$ rad

21.- Conociendo $\sin 11^\circ = 0,19$ y $\cos 11^\circ = 0,98$, calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos (sin calculadora y razonando la respuesta):

a) 79° b) 101° c) 169° d) 191° e) 259° f) 281° g) 349° h) 371° i) 821°

22.- Conociendo $\sin 37^\circ = 0,6$ y $\cos 37^\circ = 0,8$, calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos (sin calculadora y razonando la respuesta):

a) 53° b) 127° c) 143° d) 217° e) 233° f) 307° g) 323° h) 413° i) 847°

23.- Conociendo $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ y $0 < \alpha < 90^\circ$, calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos (sin calculadora y razonando la respuesta):

a) α b) $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ c) $-\alpha$ d) $(\pi - \alpha)$ e) $(\pi + \alpha)$

24.- Di si son iguales, opuestas o no tienen relación las siguientes razones trigonométricas. Justifica la respuesta:

a) $\sin 22^\circ$ y $\cos 68^\circ$ b) $\operatorname{tg} 19^\circ$ y $\operatorname{tg} 199^\circ$ c) $\sin 45^\circ$ y $\cos 225^\circ$ d) $\sin 90^\circ$ y $\operatorname{cosec} 90^\circ$ e) $\operatorname{tg} 73^\circ$ y $\operatorname{tg} 173^\circ$ g) $\cos 118^\circ$ y $\cos 62^\circ$ h) $\sec 110^\circ$ y $\sec 70^\circ$ j) $\sin 395^\circ$ y $\sin 35^\circ$ k) $\cos 395^\circ$ y $\cos (-35^\circ)$ l) $\operatorname{tg} 25^\circ$ y $\operatorname{cotg} 225^\circ$

25.- Di si son iguales, opuestas o no tienen relación las siguientes razones trigonométricas. Justifica la respuesta:

- a) $\sin \frac{\pi}{3}$ y $\sin \frac{2\pi}{3}$ b) $\cos \frac{\pi}{3}$ y $\cos \frac{5\pi}{3}$ c) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ y $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$ d) $\sec \frac{\pi}{6}$ y $\sec \frac{7\pi}{6}$
e) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3}$ y $\operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}$ f) $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{cosec} \frac{7\pi}{2}$

26.- Averigua el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de diámetro 30 cm.

27.- Halla los ángulos menores de 360° cuyo seno vale:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) 0 h) -1 i) 1

28.- Halla los ángulos menores de 360° cuyo coseno vale:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) 0 h) -1 i) 1

29.- Halla los ángulos cuya tangente vale:

- a) 1 b) -1 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\sqrt{3}$ e) $-\sqrt{3}$ f) 0 g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\pm \infty$

30.- Calcula el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos y explica el procedimiento que para ello has seguido:

- a) 1470° b) 1935° c) $\frac{14\pi}{3}\text{rad}$ d) $\frac{32\pi}{6}\text{rad}$ e) -240°

31.- Calcula el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos y explica el procedimiento que para ello has seguido:

- a) 330° b) 2010° c) 960° d) 315° e) $\frac{5\pi}{6}\text{rad}$

32.- Si α es un ángulo agudo y $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, averigua el seno, coseno y tangente de los ángulos complementario, suplementario y opuesto de α . Halla también las razones trigonométricas del ángulo que se diferencia de α en 180°

33.- Calcula los siguientes triángulos isósceles (A y C los ángulos iguales, b la base, l los lados iguales y h la altura)

- a) $A = 68^\circ 57'$ y $l = 35\text{ m}$ b) $l = 78\text{ m}$ y $b = 102\text{ m}$ c) $A = 27^\circ 8' 20''$ y $b = 3'2\text{ m}$
a) $b = 14\text{ m}$ y $h = 15\text{ m}$

34.- Calcula la altura de una torre situada en un terreno horizontal, sabiendo que con un aparato de 1'20 m de altura, colocado a 20 m de ella, se ha medido el ángulo que forma con la horizontal la visual dirigida al punto más elevado, y se ha obtenido un ángulo de $48^\circ 30'$

35.- Resuelve los siguientes triángulos rectángulos en A, si se conocen los datos siguientes:

- a) $a = 54\text{ m}$ y $B = 32^\circ 25'$ b) $b = 122\text{ m}$ y $c = 130\text{ m}$ c) $b = 230\text{ m}$ y $B = 62^\circ 26'$

36.- Resuelve los triángulos en los que se conocen los datos siguientes (La longitud de los lados se expresa en metros)

- a) $a = 12$, $B = 32^\circ$ y $C = 124^\circ$ b) $b = 40$, $c = 45$ y $A = 62^\circ 9'$
c) $a = 90$, $b = 102$ y $A = 61^\circ 18'$ d) $a = 12$, $b = 20$ y $c = 15$

37.- Tres pueblos A, B y C, están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia de A hasta B es de 6 km, del pueblo B al C hay 9 km, y el ángulo formado por las carreteras AB y BC es de 130° ¿Cuánto dista el pueblo A del C?

38.- El lado de un pentágono regular inscrito es 6'8 m. Halla el radio de la circunferencia circunscrita.

39.- La distancia entre dos puntos C y D, a un lado de un río, es de 60 m. Desde estos puntos se miden los ángulos $ACB = 58^\circ$, $ACD = 95^\circ$, $ADB = 53^\circ$ y $BDC = 98^\circ$ ¿Cuál es la distancia entre A y B?

40.- ¿Bajo qué ángulo se ve un objeto de 7 m de largo por un observador cuyo ojo dista 5m de un extremo y 8 del otro extremo?

41.- En el triángulo ABC se conoce $AB = 12$ m, $BC = 8$ m y $B = 50^\circ$. Halla el ángulo que forma la mediana AM con la semirrecta MB. Calcula el tercer lado.

42.- Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{cosec}^2 a - \cotg^2 a = 1$

b) $\operatorname{tg} a + \cotg a = \sec a \cdot \operatorname{cosec} a$

c) $\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \sec^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a$

d) $\cotg^2 a - \cos^2 a = \cotg^2 a \cdot \cos^2 a$

e) $\sen a \cdot \cos a \cdot \operatorname{tg} a \cdot \cotg a \cdot \sec a \cdot \operatorname{cosec} a = 1$

f) $\sen^2 a - \cos^2 b = \sen^2 b - \cos^2 a$

g) $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \sen^2 a \cdot \sen^2 b = \cos^2 a - \sen^2 b$

h) $\frac{\cotg a + \operatorname{tg} a}{\cotg a - \operatorname{tg} a} = \frac{1}{\cos^2 a - \sen^2 a}$

i) $\frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} = \frac{\cos a + \sen a}{\cos a - \sen a}$

j) $\cotg x - \frac{\cotg^2 x - 1}{\cotg x} = \operatorname{tg} x$

k) $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\cotg a + \cotg b} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b$

l) $\frac{\sen x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sen^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

m) $\frac{\sen x + \cotg x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x} = \cos x$

43.- Calcula el valor numérico de las expresiones siguientes (sin utilizar calculadora)

a) $\cos 60^\circ - 2 \sen^2 30^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 150^\circ =$

b) $\cos^2 135^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 225^\circ \cdot \sen^2 300^\circ - \cotg 315^\circ =$

c) $\frac{\sen 270^\circ \cdot \cos 135^\circ}{(1 + \cos 225^\circ)(1 - \cos 225^\circ)} =$

d) $\left(\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\sen 90^\circ} - 2 \sen^2 45^\circ \right) \cos^2 45^\circ =$



TEMA 7: GEOMETRÍA ANALÍTICA

1.- VECTORES

Para representar gráficamente un punto en un plano utilizamos como sistema de referencia unos ejes cartesianos: dos rectas perpendiculares con divisiones iguales que representan una unidad. El 0 en las dos rectas coincide con el punto de intersección de dichas rectas. Son unidades positivas las de la derecha y negativas las de la izquierda en el eje horizontal (eje de las abscisas o eje OX) o positivas las de la parte superior y negativas las de la inferior en el vertical (eje de las ordenadas o eje OY). Un punto cualquiera del plano queda determinado por un par de números que se corresponden con las proyecciones sobre el eje X e Y respectivamente. El primero número es el valor de la x (valor de la abscisa), el segundo el de la y (valor de la ordenada).

Estos números son las coordenadas del punto. Se representan con letras mayúsculas y entre paréntesis sus coordenadas: $A(x,y) = A(2, 3)$

Un punto sobre el eje OX tiene la ordenada 0, es decir $y=0$. Un punto sobre el eje OY tiene de abscisa 0, es decir $x=0$.

En un plano cartesiano (plano que tiene como sistema de referencia unos ejes cartesianos), un segmento viene determinado por los dos puntos de los extremos.

a) Vector fijo del plano $\overline{AB}$ es un segmento orientado del plano y se identifica por los puntos de sus extremos. Se representa con las dos letras mayúsculas de los puntos de sus extremos con una flecha encima o bien en negrita (para facilitar la escritura en la imprenta). La primera letra representa el punto origen A y la segunda el extremo B.

Elementos de un vector $\overline{AB} = \vec{v}$:

- Punto de aplicación: es el origen del vector.
- Dirección: la de la recta sobre la que está situada el vector, es decir, la recta que une los dos puntos extremos: la dirección de $\overline{AB}$ es la misma que la de $\overline{BA}$. Una recta y todas sus paralelas determinan la misma dirección.
- Sentido: orientación del vector.
- Módulo: Longitud del segmento. Coincide con la distancia entre A y B: $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

Dos **vectores son equipolentes** o equivalentes cuando tienen el mismo módulo el mismo sentido y direcciones iguales o paralelas

b) Componentes de un vector.

Para localizar un vector en un plano se utilizan sus componentes referidas a unos ejes cartesianos. Para hallar las componentes de un vector basta ver cuantas unidades avanza horizontalmente y verticalmente desde su origen hasta su extremo.

Las componentes de un vector se calculan hallando la diferencia entre las coordenadas del punto extremo y las coordenadas del origen. Un vector libre queda determinado por sus componentes. Si

$A(2,3)$ y $B(8, 11)$ Las componentes de $\overrightarrow{AB}$ son $(8-2, 11-3) = (6, 8)$ y se representa $\overrightarrow{AB} = (6,8)$ o $\overline{AB}(6,8)$

Las componentes de un vector que tiene como punto de aplicación el origen de coordenadas coinciden con las coordenadas del punto extremo.

Vector nulo es el que tiene módulo 0, el origen y el extremo es el mismo punto. Las componentes del vector nulo son (0,0)

Vector opuesto de un vector es el que tiene el mismo módulo, la misma dirección o direcciones paralelas pero sentido contrario. Un vector más su opuesto es el vector nulo. Las componentes de un vector opuesto de otro son opuestas: Si $\vec{u} = (3,8)$ el opuesto $-\vec{u} = (-3,-8)$; Si $\vec{AB}$ su opuesto $\vec{BA}$

c) Las **coordenadas del punto medio** de un segmento son las que se obtienen con la semisuma de las coordenadas de los extremos. Si A(-3, 7) y B (1,5) las coordenadas del punto medio del segmento AB son $M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = M(-1,6)$

d) Calculo del módulo de un vector conocidas sus componentes:

Conocidas las componentes de un vector podemos hallar su módulo. Para ello basta con hallar la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos las componentes del vector.

$$\text{Si } \vec{u}(x,y) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Si } \vec{u}(6,8) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

Si $\vec{AB}(x,y)$ el módulo $\vec{AB}$ es: $|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Ejemplo: Si $\vec{AB} = (6,8)$ $|\vec{AB}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

2.- OPERACIONES CON VECTORES.

a) **La suma (o resta) de vectores da como resultado un nuevo vector.**

Para **sumar vectores** se puede hacer de forma analítica y de forma geométrica.

- De forma analítica se hace sumando las componentes de los dos vectores:

$$\text{Si } \vec{u}(3,8), \vec{v}(7,-3) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (3+7, 8-3) = (10,5)$$

- De forma geométrica tomando representantes de los vectores y colocándolos uno a continuación de otro, de forma que el origen de uno coincida con el extremo del otro. El vector suma es el que tiene el origen el origen del primero colocado y el extremo en el extremo del último colocado

- Otra forma de hacer la suma geoméricamente, es tomar representantes de dos vectores con el mismo punto de aplicación y formar un paralelogramo con las direcciones de estos dos vectores. La suma será el vector de la diagonal con el origen en el punto de aplicación de los sumandos.

Para **restar vectores** sumaremos al vector del minuendo el opuesto del vector del sustraendo, es decir restaremos sus componentes:

$$\text{Si } \vec{u}(3,8), \vec{v}(7,-3) \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = (3-7, 8+3) = (-4,11)$$

b) **El producto de un vector por un número es otro vector** que tiene de módulo el producto del módulo del vector por el número, dirección la misma y sentido el mismo si el número es positivo y opuesto si el número es negativo.

Para multiplicar un vector por un número multiplicaremos sus componentes:

$$\text{Si } \vec{u}(3,8), \text{ otro vector } \vec{v} = 3\vec{u} = (9,24)$$

Por lo tanto, **vectores paralelos**: Dos vectores tienen la misma dirección o direcciones paralelas si sus componentes son proporcionales.

c) Producto escalar de dos vectores.

El producto escalar de dos vectores es un número real resultado de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle \vec{u} \vec{v}$$

Si conocemos las componentes de los vectores respecto de unos ejes cartesianos podemos obtener el producto escalar sumando el producto de sus componentes:

$$\text{Si } \vec{u}(x_1, y_1) \text{ y } \vec{v}(x_2, y_2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Consecuencias:

c.1) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ con $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, ya que si los vectores son perpendiculares, forman un ángulo de 90° , cuyo coseno es 0.

La condición para ver si dos vectores distintos de cero sean perpendiculares es que su producto escalar sea cero.

c.2) El módulo de un vector es la raíz cuadrada de su producto escalar:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \angle \vec{u} \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \\ \Rightarrow |\vec{u}| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \end{aligned}$$

$$\text{c.3) } \cos \angle \vec{u} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

c.4) Si los vectores son paralelos su producto escalar coincide con el producto de sus módulos si son del mismo sentido y con el opuesto de este producto si el sentido es opuesto.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle \vec{u} \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \text{ pues si tienen el mismo sentido es}$$

$\cos 0^\circ$ y $\cos 0^\circ = 1$, Si el sentido es opuesto es $\cos 180^\circ$ y $\cos 180^\circ = -1$

3.- RECTA EN EL PLANO

Llamamos ecuación de la recta a la expresión algebraica que relaciona los valores de las coordenadas x e y de cualquier punto de dicha recta.

Si un punto pertenece a una recta sus coordenadas deben satisfacer su ecuación. Para hallar un punto de una recta damos un valor cualquiera a una de sus coordenadas y obtenemos la otra despejando de la ecuación.

Una recta queda determinada si conocemos dos, cualquiera, de sus puntos.

Una recta queda determinada si conocemos uno de sus puntos y un vector en su dirección.

Estas dos determinaciones son análogas puesto que, si conocemos dos puntos, conocemos un punto y un vector director que es el determinado por los dos puntos conocidos, es decir el vector que los une.

Un vector con la dirección de la recta es un vector director de esta. Existen infinitos vectores directores para cada recta y todos son paralelos, es decir tienen las componentes proporcionales.

a) Ecuaciones de una recta.

Ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(p_x, p_y)$ y tiene como vector director $\vec{v} (v_x, v_y)$: si $X(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta r:

a.1) Ecuación vectorial: $\vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow (x, y) = (p_x, p_y) + t \cdot (v_x, v_y)$ con $t \in \mathbb{R}$

Cada vez que damos a t un valor obtenemos un punto de la recta, a cada punto le corresponde un valor del parámetro t .

a.2) Separando la ecuación anterior por componentes obtenemos la expresión:

$$\text{Ecuación paramétrica: } \begin{cases} x = p_x + t \cdot v_x \\ y = p_y + t \cdot v_y \end{cases}$$

a.3) Despejando el parámetro t e igualando las dos expresiones de t obtenemos:

$$\text{Ecuación continua: } \frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}$$

a.4) Quitando denominadores, operando y llamando A al coeficiente de x , B al coeficiente de y , al resto de la ecuación C obtenemos:

La ecuación cartesiana, general o implícita : $Ax + By + C = 0$

a.5) Despejando y obtenemos la ecuación explícita $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

a.6) Si $-\frac{A}{B} = m$ y si $-\frac{C}{B} = n$ la ecuación explícita : $y = mx + n$,

donde m es la pendiente de la recta y n la ordenada del origen.

Llamamos pendiente de la recta a la inclinación de la recta respecto del eje OX^+ , se mide con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje OX^+ . Si $\vec{v} (v_x, v_y) = (-B, A) = (q_x - p_x, q_y - p_y)$, la

pendiente de la recta es $m = \tan(r, OX^+) = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{A}{B} = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}$ = coeficiente de la x cuando la recta

está en forma explícita.

a.7) Ecuación punto pendiente: Si se conoce un punto de la recta $P(p_x, p_y)$ y la pendiente m obtenemos:

$$y - p_y = m(x - p_x)$$

b) Posiciones de rectas:

b.1) Si consideramos los vectores directores $\vec{v} (v_x, v_y)$ de la recta r y $\vec{u} (u_x, u_y)$ de la recta r' :

- Si sus componentes son proporcionales $\Leftrightarrow \frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$ las rectas son paralelas
- Si sus componentes son proporcionales $\Leftrightarrow \frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$ y además tienen un punto común (con lo que los tiene todos) son coincidentes
- Se cortan (son incidentes) si sus componentes no son proporcionales $\Leftrightarrow \frac{u_x}{v_x} \neq \frac{u_y}{v_y}$
- Son perpendiculares si $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow u_x v_x + u_y v_y = 0$

b.2) Si consideramos las pendientes m de la recta r y m' de la recta r' :

- Si las pendientes son iguales $m = m'$ son paralelas
- Si las pendientes son iguales $m = m'$ y además tienen un punto común (con lo que los tiene todos) son coincidentes
- Se cortan (son incidentes) si $m \neq m'$
- Son perpendiculares si $m \cdot m' = -1$

b.3) Si consideramos $r : Ax + By + C = 0$ y la de $r' : A'x + B'y + C' = 0$:

- Son paralelas si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$
- Son coincidentes si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
- Se cortan si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
- Son perpendiculares si $A \cdot A' + B \cdot B' = 0$



c) El ángulo que forman dos rectas es el ángulo que forman sus vectores directores:

$$\cos r r' = \cos u v = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

d) La distancia entre dos puntos es igual al valor del módulo del vector que determinan dichos puntos. Si los puntos son: $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

4.- LUGARES GEOMÉTRICOS

Se llama lugar geométrico al conjunto formado por todos los puntos que cumplen una determinada propiedad.

Ejemplos importantes de lugares geométricos:

a) Mediatriz de un segmento: es el lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan de los puntos extremos de dicho segmento.

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la mediatriz y los extremos del segmento son los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la ecuación de la mediatriz viene dada por la expresión:

$$d(P,A) = d(P,B) \Leftrightarrow |\vec{PA}| = |\vec{PB}| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

b) Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan de sus lados.

(No estudiamos su ecuación por no conocer en este curso la distancia de un punto a una recta)

c) Circunferencia: Lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Esta distancia recibe el nombre de radio y se representa por r .

Si el punto fijo es $C(a,b)$ y un punto cualquiera de la circunferencia es $P(x,y)$ la ecuación de la circunferencia será:

$$d(C,P) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Haciendo cálculo y llamando A al coeficiente de la x : $-2a = A$, llamando B al coeficiente de la y : $-2b = B$, llamando C al término independiente: $a^2 + b^2 - r^2 = C$

Tendremos: $x^2 - 2ax + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Si el centro es $C(0,0)$ la ecuación será $x^2 + y^2 = r^2$ y recibe el nombre de ecuación reducida de la circunferencia.

d) La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una cantidad constante.

Las características más importantes de una elipse son:

- Los focos: puntos fijos representados por F y F'
- Los radios vectores: segmentos que unen cualquier punto de la elipse con los focos: Si P es un punto de la elipse serán los segmentos PF y PF'
- El eje principal o eje mayor : el segmento AA' que pasa por los focos y tiene sus extremos en la elipse. Su longitud es 2a y coincide con el valor de la constante de la definición.
- El eje secundario o eje menor: mediatriz del segmento FF' y cuyos extremos están en la elipse. Su longitud es 2b.
- Distancia focal: la distancia entre los focos F y F'. Su longitud es 2c.
- Excentricidad: la razón entre la distancia focal y el eje mayor, $e = \frac{c}{a}$, cuyos valores varían entre 0 y 1. La excentricidad expresa la mayor o menor abertura de la elipse. Si la excentricidad es 0, resulta una circunferencia, y si es uno, un segmento.
- Los vértices de la elipse: Los puntos en que los ejes cortan a la elipse.
- Centro de la elipse es el punto intersección de los ejes
- La relación entre los parámetros a, b y c viene dada por: $a^2 = b^2 + c^2$

La ecuación de la elipse se obtiene a partir de su definición: $d(P,F) + d(P,F') = 2a$

Vamos a utilizar la ecuación reducida de la elipse, es decir, aquella en que los ejes de la elipse coinciden con los ejes coordenados y, por lo tanto el centro está situado en el origen de coordenadas.

De esta manera, si el eje mayor es el eje OX, las coordenadas de los focos serán F(c,0) y F'(-c,0), las coordenadas de los vértices serán A(a,0), A'(-a,0), B(0,b) y B'(0,-b) Aplicando la condiciones $d(P,F) + d(P,F') = 2a$ y $a^2 = b^2 + c^2$.

Haciendo operaciones se obtiene la ecuación reducida de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Si el eje mayor es el eje OY, las coordenadas de los focos serán F(0,c) y F'(0,-c), las coordenadas de los vértices serán A(0,a), A'(0,-a), B(b,0) y B'(-b,0) Aplicando la condiciones $d(P,F) + d(P,F') = 2a$ y $a^2 = b^2 + c^2$

Haciendo operaciones se obtiene la ecuación reducida de la elipse $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

e) La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una cantidad constante.

Las características más importantes de una hipérbola son:

- Los focos: puntos fijos representados por F y F'
- Los radios vectores: segmentos que unen cualquier punto de la hipérbola con los focos: Si P es un punto de la hipérbola serán los segmentos PF y PF'
- El eje real o simplemente eje : el segmento AA' que pasa por los focos y tiene sus extremos en la hipérbola. Su longitud es 2a y coincide con el valor de la constante de la definición.
- El eje imaginario: trozo de la mediatriz del segmento FF'. Su longitud es 2b.
- Distancia focal: la distancia entre los focos F y F'. Su longitud es 2c.
- Excentricidad: la razón entre la distancia focal y el eje mayor, $e = \frac{c}{a}$, en la hipérbola es mayor o igual que 1. La excentricidad expresa la mayor o menor abertura de la hipérbola.
- Los vértices de la hipérbola: Los puntos en que el eje corta a la hipérbola.

- Centro de la hipérbola es el punto intersección de los ejes real e imaginario. Se cortan en sus puntos medios
- La relación entre los parámetros a , b y c viene dada por: $c^2 = a^2 + b^2$

La ecuación de la hipérbola se obtiene a partir de su definición: $|d(P,F) - d(P,F')| = 2a$

Vamos a utilizar la ecuación reducida de la hipérbola, es decir, aquella en que los ejes de la hipérbola coinciden con los ejes coordenados y, por lo tanto el centro está situado en el origen de coordenadas.

De esta manera, si el eje mayor es el eje OX, las coordenadas de los focos serán $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$, las coordenadas de los vértices serán $A(a,0)$, $A'(-a,0)$. Aplicando las condiciones $|d(P,F) - d(P,F')| = 2a$ y $c^2 = a^2 + b^2$. Haciendo operaciones se obtiene la ecuación reducida de la hipérbola es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Si el eje mayor es el eje OY, las coordenadas de los focos serán $F(0,c)$ y $F'(0,-c)$, las coordenadas de los vértices serán $A(0,a)$, $A'(0,-a)$. Aplicando las condiciones, $|d(P,F) - d(P,F')| = 2a$ y $c^2 = a^2 + b^2$. Haciendo operaciones se obtiene la ecuación reducida de la hipérbola es $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

f) La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia a un punto fijo llamado foco es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz

Los elementos de la parábola son:

- Foco: Punto fijo de la parábola se representa por F .
- Directriz: recta fija de la parábola se representa por r .
- Radio vector: segmento que une un punto de la parábola con el foco.
- Eje : recta perpendicular a la directriz pasando por el foco.
- Vértice: Punto en el que la parábola corta al eje.
- Parámetro: distancia del foco a la directriz, se representa por $p =$ segmento DF siendo D el punto donde se corta el eje y la directriz.
- El vértice divide al segmento DF en dos partes iguales

La ecuación de la parábola se obtiene a partir de su definición: $d(P,F) = d(P,r)$. Vamos a utilizar la ecuación reducida de la parábola, es decir, aquella en que el eje coincide con los ejes coordenados y el vértice con el origen de coordenadas.

De esta manera, si el eje es el eje OX, las coordenadas del foco será $F(\frac{p}{2}, 0)$ las coordenadas del vértice será $A(0,0)$, y la ecuación de la directriz $x = -\frac{p}{2}$

Aplicando la condición $d(P,F) = d(P,r)$ y haciendo cálculos se obtiene la ecuación reducida de la parábola $y^2 = 2px$

De esta manera, si el eje es el eje OY, las coordenadas del foco será $F(0, \frac{p}{2})$ las coordenadas del vértice será $A(0,0)$, y la ecuación de la directriz $y = -\frac{p}{2}$

Aplicando la condición $d(P,F) = d(P,r)$ y haciendo cálculos se obtiene la ecuación reducida de la parábola $x^2 = 2py$

Ejercicios de geometría:

- 1.- Dados los puntos $A(4, -3)$ $B(-3, 1)$ $C(1, 1)$. Calcular analítica y gráficamente:
 - a) Las componentes de los vectores $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BC}$
 - b) Las componentes de los vectores $\mathbf{BA}$ y $\mathbf{CB}$ ¿Cómo son estos vectores respecto de los del apartado a ?
 - c) Los módulos de los vectores anteriores
 - d) La suma de los vectores $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BC}$
 - e) La resta de los vectores $\mathbf{AB} - \mathbf{BC}$
 - f) El vector $4 \cdot \mathbf{AB}$ y $-3 \cdot \mathbf{BC}$
 - g) El producto escalar de $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BC}$
 - h) El coseno del ángulo que forman $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BC}$
- 2.- Dados los vectores $\mathbf{a}(-1,4)$ y $\mathbf{b}(2,-3)$, se pide:
 - a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y su producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
 - b) los módulos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$
 - c) El ángulo que forman
- 3.- Determina el valor de m para que el producto escalar de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sea:
 - a) igual a 4 con $\mathbf{u}(m,1)$ y $\mathbf{v}(2, -3)$
 - b) igual a -2 con $\mathbf{u}(m, 2)$ y $\mathbf{v}(3, m)$
 - c) igual a -3 con $\mathbf{u}(m, -3)$ y $\mathbf{v}(m, 4)$
- 4.- Calcula el valor de h sabiendo que el módulo de $\mathbf{u}(h,3)$ es 5
- 5.- Halla el valor de a si el ángulo que forma $\mathbf{u}(3,a)$ y $\mathbf{v}(2, -1)$ vale
 - 1) 90° 2) 0° 3) 45° 4) 60°
- 6.- ¿Qué modificación sufre el módulo de un vector $\mathbf{v}$ si se multiplican sus componentes por 2?
- 7.- Calcula el valor de h si el vector $\mathbf{u}(3, h)$ es ortogonal con $\mathbf{v}(-1, 4)$
- 8.- Calcula el valor de m para que los vectores $\mathbf{u}(1, m)$ y $\mathbf{v}(-4, m)$ sean perpendiculares
- 9.- Calcula las coordenadas del vector $\mathbf{u}(x,y)$ sabiendo que se verifica simultáneamente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ y $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 2$ con $\mathbf{w}(-1, 0)$ y $\mathbf{v}(2, -3)$
- 10.- Dados los vectores $\mathbf{u}(-1, 4)$ y $\mathbf{v}(-2,5)$, determina:
 - a) Coordenadas del punto B si A(2, -1) y $\mathbf{AB}$ es equivalente al vector $\mathbf{u}$
 - b) Coordenadas de C si D(1, 3) y $\mathbf{CD}$ es equivalente al vector $\mathbf{v}$
- 11.- Dados los vectores $\mathbf{AB}$ con A(-1, 0) y B($\frac{1}{2}, 1$) y $\mathbf{CD}$ con C(2, -4), D(0,-1), determina:
 - a) Coordenadas del punto M si N(2,5) y $\mathbf{MN}$ es equivalente al vector $\mathbf{AB}$
 - b) Coordenadas de Q si P(-3,2) y $\mathbf{PQ}$ es equivalente al vector $\mathbf{CD}$
- 12.- Dados los puntos A(1,0), B(0,1), C(1,1) y D(2,2) se pide: La distancia entre A y B y la distancia entre C y D.
- 13.- Determina m si la distancia entre los puntos A(3, m) y B(1,-1) es $\sqrt{17}$

14.- Calcula las coordenadas del punto A, sabiendo que A(x,y) equidista de los puntos B(1,1), C(0,2) y D(-1,0)

15.- Halla las ecuaciones de la recta en forma vectorial, paramétrica, continua, general o cartesiana, explícita y punto pendiente si conocemos:

- Pasa por el punto P(1,-3) y tiene la dirección del vector $\mathbf{v}(3,-3)$
- Dos puntos de la recta son P(2,5) y Q(-1,4)
- Pasa por el punto P(2,1) y tiene la dirección del vector $\mathbf{v}(-1, 4)$
- Dos puntos de la recta son P(-3,-5) y Q(3,1)
- Conocemos la ecuación implícita $3x - 7y - 14 = 0$
- Conocemos la ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$
- Conocemos la ecuación continua: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3}$
- Conocemos la ecuación vectorial $(x, y) = (-1, -2) + t(2,4)$
- Conocemos la ecuación explícita $y = -3x + 4$

16.- En cada uno de los apartados del ejercicio anterior: indica un punto, un vector director, la pendiente y escribe la ecuación punto pendiente

17.- Comprobar si los puntos A(3,2) y B(5,7) pertenecen o no a cada una de las rectas, y halla un punto de nuevo en cada caso:

$$\text{a) } x - 3y - 4 = 0 \quad \text{b) } y = x + 2 \quad \text{c) } \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5}$$

18.- Dada la recta $y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}$ completa las coordenadas de los siguientes puntos de esa recta:

$$P(3,y), Q(x, \frac{7}{2}), T(0,y)$$

19.- Pasa por el origen la recta $(x, y) = (-1, -2) + t(2,4)$. Halla otro punto de ella.

20.- Halla los puntos donde la recta $y = 3x - 1$ tiene a) ordenada nula b) abscisa nula.

21.- Comprueba que los puntos A(1, 1) y B(-1, 2) están en la recta $x + 2y - 3 = 0$. Halla el punto medio del segmento AB y comprueba que también está en la recta.

22.- Genera tres puntos de las rectas a) $(x, y) = (2t - 1, -t)$ b) $3x + 2y - 5 = 0$

23.- Comprueba si los puntos A(-1, 4) y B(3, 0) están en la rectas:

$$r: 2x - y - 6 = 0 \quad y \quad r': \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} \quad \text{¿Qué puedes decir de ambas rectas?}$$

24.- Halla las posiciones relativas de las siguientes rectas:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \end{cases} \quad y \quad r': \frac{x}{3} = \frac{y-2}{4} \quad \text{b) } r: 6x - 2y + 1 = 0 \quad y \quad r': y = 3x + 4$$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \quad y \quad r': (x, y) = (-1, -1) + t(-9, -6) \quad \text{d) } r: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t + 2 \end{cases} \quad y \quad r': x + y - 1 = 0$$

e) $r: y+3x=0$ $r': 3x-y=0$ $r'': x-3y=0$

f) $r: y=2x+3$ $r': (x, y) = (2, 1) + t(3, 6)$ g) $r: 3x-4y+1=0$ $r': \frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{-3}$

25.- De entre los siguientes pares de rectas, indica cuáles son paralelas, perpendiculares o se cortan en un punto sin ser perpendiculares hallando las coordenadas del punto de intersección en su caso (razonar la respuesta):

- a) $2x+3y=0$ y $4x+6y+8=0$
- b) $x-y=0$ y $2x+y-1=0$
- c) $3x+2y-5=0$ y $2x-3y+4=0$

26.- Determina el valor de b para que las rectas $r: 2x-3y-5=0$ y $s: 6x+by=7$ sean:

a) paralelas b) perpendiculares:

27.- Dadas las rectas $r: ax+2y+4=0$ y $s: 10x+by-2=0$ determina a y b para que dichas rectas que se corten en el punto $P(2, 3)$

28.- Encuentra los coeficientes h y k de las rectas $r: 3x-hy=2$ y $s: kx+4y=5$ sabiendo que son paralelas y que la primera pasa por el punto $P(2,-2)$

29.- Halla el valor de a para las rectas $3x-2y=6$; $3x+4y=0$; $y=ax+1$ sean incidentes, y determina el punto de intersección.

30.- Determina el valor de b para que las rectas $3x+5y-7=0$ y $6x+by=1$ sean:

a) paralelas b) perpendiculares.

31.- Determina el valor de b para que las rectas sean $bx+3y=1$ y $x+y=0$ sean:

a) paralelas b) perpendiculares.

32.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y es paralela a $2x+5y-7=0$

33.- De todas las rectas paralelas a la $y=2x-5$ escribe la que pasa por el punto $(7, 0)$

34.- Halla la recta perpendicular a $3x-y+5=0$ pasando por $(0, 0)$

35.- Halla la ecuación de las rectas que pasan por el punto intersección de las rectas $2x-3y+1=0$ y $x+2y+2=0$, de modo que una sea paralela a $y=x$ y la otra pase por el punto $(3, 6)$

36.- Determina analíticamente el ángulo que forman las rectas:

- a) $x+2y-3=0$ y $3x-5y+4=0$ b) el eje de las ordenadas con $2x+y+4=0$
- c) $y=x-3$ e $y=-x+8$ d) $2y-x+4=0$ y $x-3y+1=0$ e) Las dos bisectrices

37.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 0)$ y el ángulo que forma con el eje OX

38.- Dada la recta $2x-3y+12=0$, halla la ecuación de la mediatriz del segmento que en dicha recta interceptan los ejes coordenados.

39.- Halla las ecuaciones de las circunferencias cuyo centro y radio son:

- 1) $C(3, -2)$, $r = 4$ 2) $C(0,3)$, $r = 3$ 3) $C(2,3)$, $r = 1$
4) tiene su centro en $(2, -3)$ y pasa por el punto $(1,4)$
5) tiene por diámetro el segmento AB con $A(2,0)$, $B(-6,6)$

40.- Halla las coordenadas del centro y el radio en las circunferencias siguientes:

- 1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ 2) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 14 = 0$ 3) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
4) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 10 = 0$ 5) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 36$ 6) $x^2 + y^2 = 49$

41.- Indica, de las elipses que se dan a continuación, donde está situado el eje mayor y calcula las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad

- 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$

42.- Halla la ecuación reducida de las elipses si se conocen los siguientes datos:

- a) $F(2,0)$ $A(3,0)$ b) $F(0,4)$ $A(0,5)$ c) sus ejes miden 7 y 5 d) pasa por $(0,4)$ y su excentricidad mide $\frac{3}{5}$

43.- Calcula el eje, las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas

- a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$ b) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$ c) $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$ d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ e) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{1} = 1$

44.- Halla la ecuación reducida de las hipérbolas si se conocen los siguientes datos:

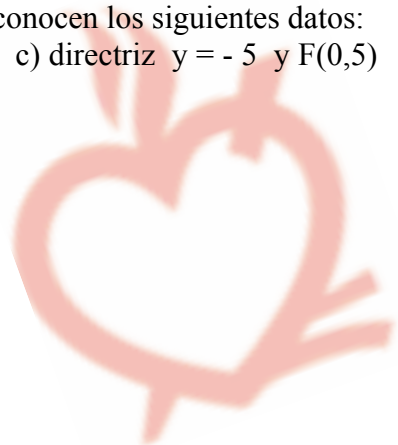
- a) $F(4,0)$ $A(2,0)$ b) $F(0,5)$ $A(0,3)$ c) $F(7,0)$ $A(5,0)$ d) $c=10$ y $a=8$

45.- Escribe en forma reducida, las ecuaciones de las siguientes parábolas, indicando el valor del parámetro, el eje, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz:

- a) $6y^2 - 12x = 0$ b) $15x^2 = -42y$ c) $2y^2 = -7x$ d) $9x^2 + 38y = 0$

46.- Halla la ecuación reducida de las parábolas siguientes si se conocen los siguientes datos:

- a) la directriz $x = -3$ y $F(3,0)$ b) la directriz $y = 4$, vértice $(0,0)$ c) directriz $y = -5$ y $F(0,5)$ d) la directriz $x = 2$ y $F(-2,0)$ e) $F(2,0)$ y vértice $(0,0)$





TEMA 8: FUNCIONES

1.- FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL: es una aplicación f que va del un subconjunto no vacío D de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de forma que a cada elemento x (variable independiente) del conjunto D le hace corresponder un elemento y (variable dependiente o imagen) del conjunto final $\mathbb{R}$:

$$f(x): \begin{matrix} D \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & y \end{matrix}$$

NOTA:

F. Empírica: la función viene definida por observación.

F. Analítica: la función viene definida por una expresión matemática:

- F. explícita si viene dada como $y = f(x)$.

Dentro de esta categoría esta la F. a trozos, la cual queda definida por expresiones matemáticas diferentes dependiendo del intervalo de la recta real donde me encuentre.

- F. implícita si viene dada como $0 = f(x,y)$

2.- CARACTERÍSTICAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES:

a) Dominio de una función $D(f(x))$, $\text{Dom}(f(x))$: Conjunto de valores de x para los cuales existe función.

b) Recorrido o imagen de una función $\text{Im}(f(x))$: Conjunto de valores de y para los cuales existe función.

c) Simetría de una función:

- Función simétrica Par (simétrica respecto al eje OY): $f(x)=f(-x)$
- Función simétrica Impar (simétrica respecto origen): $f(x)=-f(-x)$

d) Cortes con los ejes coordenados:

- Corte con el eje de abscisas (OX): $(x,0)$
- Corte con el eje de ordenadas (OY): $(0,y)$

e) Signo de una función: decimos que una función es positiva si se encuentra por encima del eje OX y negativa si se encuentra por debajo del eje OX.

Si corta al eje OX, en ese punto, la función no es ni positiva ni negativa en dicho punto.

f) Monotonía (crecimiento y decrecimiento):

- Decimos que una función es estrictamente creciente si cumple que al aumentar x , aumenta y .

- Decimos que una función es estrictamente decreciente si cumple que al aumentar x , disminuye y .

g) Extremos (máximos y mínimos)

- Decimos que una función tiene un máximo relativo en el punto del dominio donde la función es continua y sin puntos angulosos, no es punto anguloso y pasa de ser creciente a decreciente.

- Decimos que una función tiene un mínimo relativo en el punto del dominio donde la función es continua y sin puntos angulosos, no es punto anguloso y pasa de ser decreciente a creciente.

h) Asíntotas:

A. Horizontal: $y=\text{cte}$

A. Vertical: $x=\text{cte}$

i) Continuidad: Una función es continua cuando su gráfica tiene un solo trazo: se puede recorrer entera sin levantar el lápiz. Una función es discontinua cuando su gráfica tiene más de un trazo: no se puede recorrer entera sin levantar el lápiz.

j) Acotación:

- Decimos que una función está acotada superiormente si existe una recta horizontal $y = K$ tal que todas las imágenes de la función quedan por debajo o igual a dicho valor K .

A la menor de las cotas superiores se le llama supremo ($\sup(f)$).

- Decimos que una función está acotada inferiormente si existe una recta horizontal $y = K$ tal que todas las imágenes de la función quedan por encima o igual a dicho valor K .

A la mayor de las cotas inferiores se le llama ínfimo ($\inf(f)$).

k) Curvatura:

- Curvatura positiva (convexa): $\cup$

- Curvatura negativa (cóncava): $\cap$

l) Punto de inflexión: Decimos que una función tiene un punto de inflexión en el punto del dominio donde la función es continua y cambia la curvatura.

3.- TIPOS DE FUNCIONES ELEMENTALES:**3.1- FUNCIÓN LINEAL (recta): $y = ax + b$**

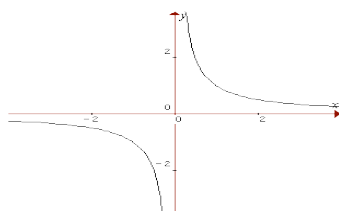
- a = pendiente: da cuenta de la inclinación de la recta. Si $a > 0$ la recta crece, si $a < 0$ decrece.
- $y = n^o$, es una recta horizontal
- $x = n^o$, es una recta vertical
- Se dibuja hallando, al menos, 2 puntos (x, y) por donde pase la recta.

3.2- FUNCIÓN CUADRÁTICA (parábola): $y = ax^2 + bx + c$

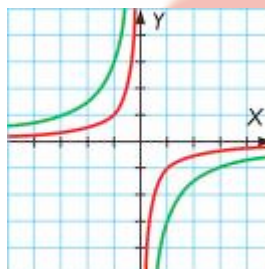
- $a > 0$: $\cup$
- $a < 0$: $\cap$
- vértice $(x, y) = (-b/2a, y(-b/2a))$
- corte con el eje OX (abscisas) : $(x, 0)$
- corte con el eje OY (ordenadas) : $(0, y)$

3.3.- FUNCIÓN TIPO $y = k/x$, con $k \in \mathbb{R}$

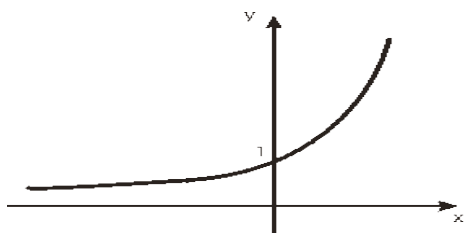
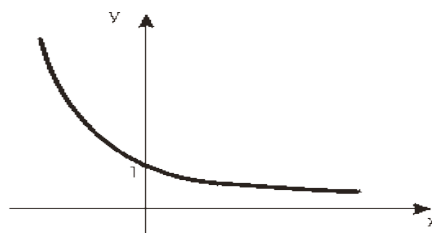
Si $k > 0$



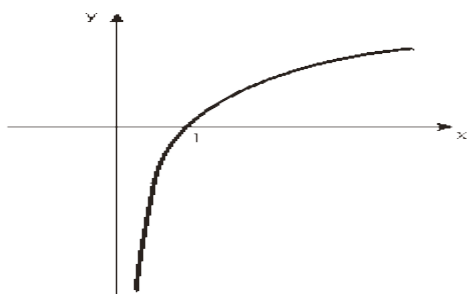
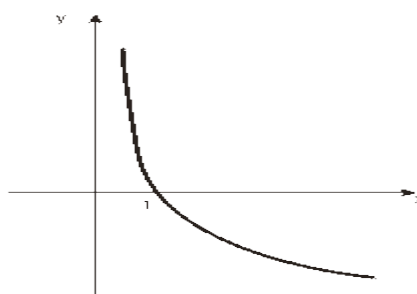
Si $k < 0$



3.4.- FUNCIÓN EXPONENCIAL: $y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}$,
 $a > 0$ y $a \neq 1$ (es decir, $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$)

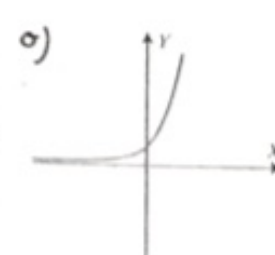
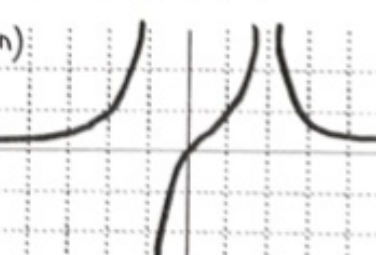
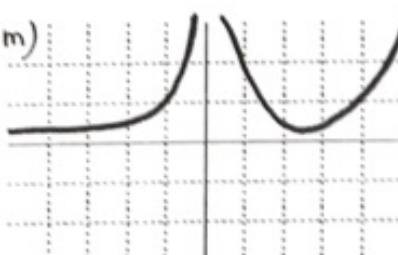
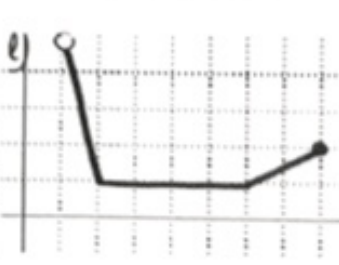
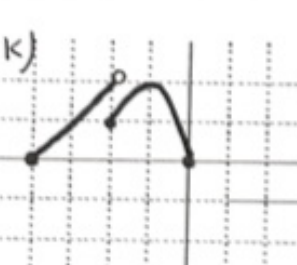
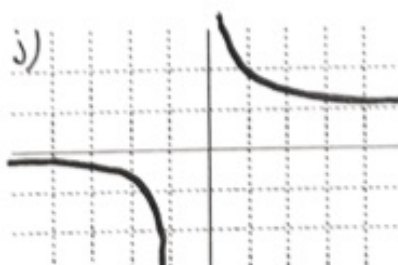
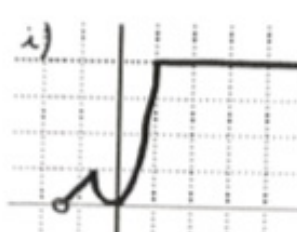
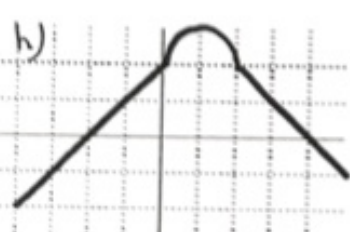
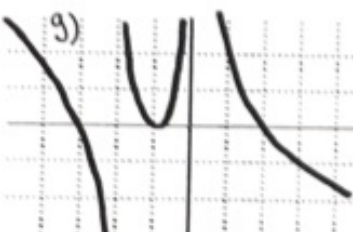
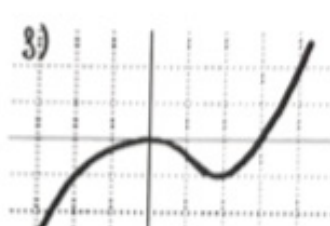
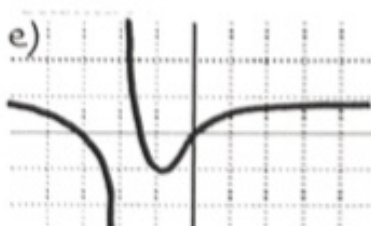
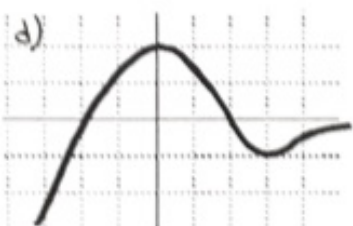
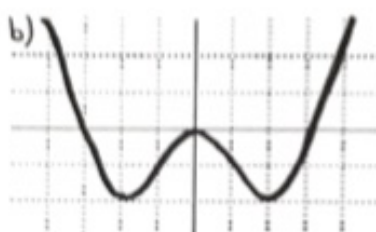
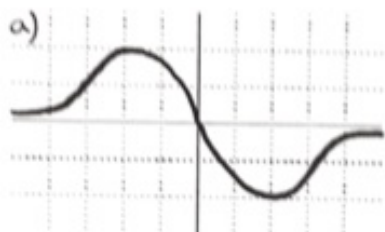
Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ ($a > 1$);Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$);

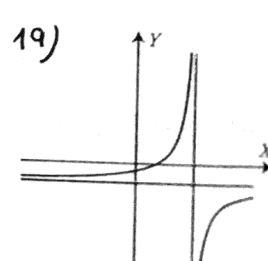
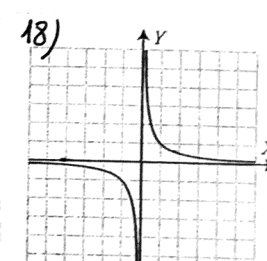
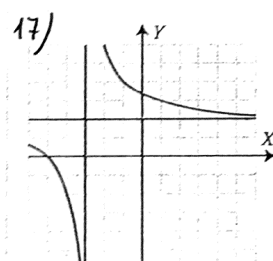
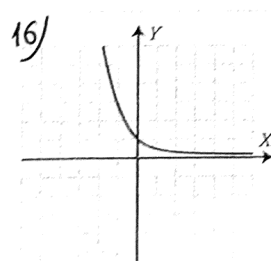
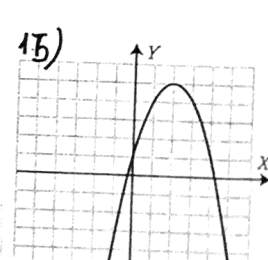
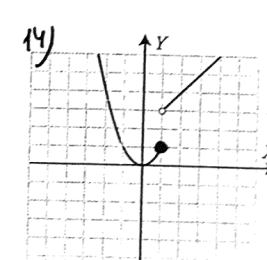
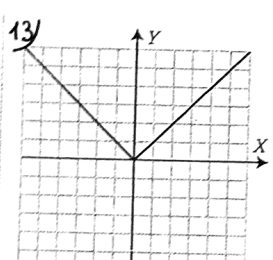
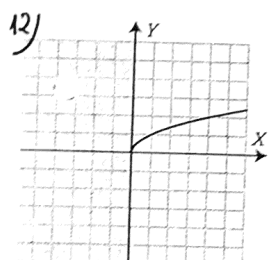
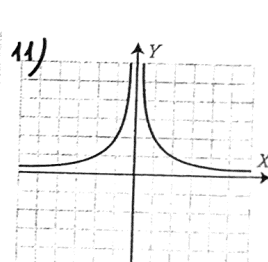
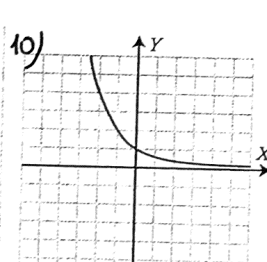
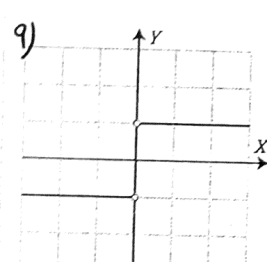
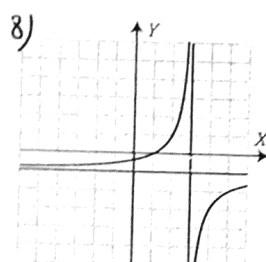
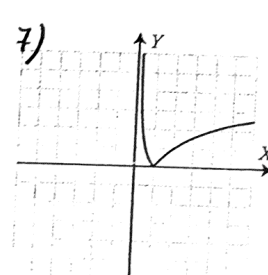
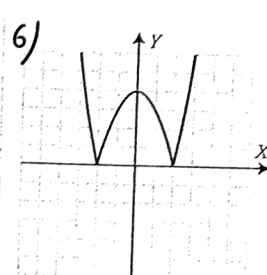
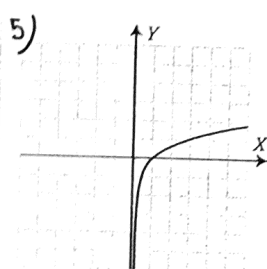
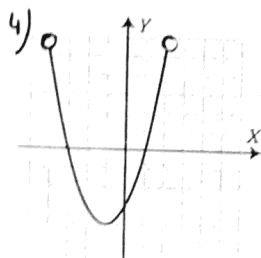
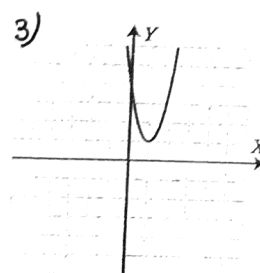
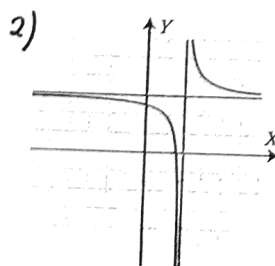
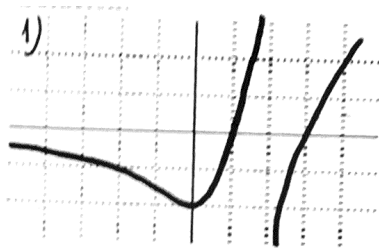
3.5.- FUNCIÓN LOGARÍTMICA: $y = \log_a x$, con $a \in \mathbb{R}$,
 $a > 0$ y $a \neq 1$ (es decir, $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$)

Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_a x$ ($a > 1$)Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_a x$ ($0 < a < 1$)

Ejercicios de funciones:

1.- Estudia las características de las gráficas de las siguientes funciones: Continuidad, dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetría, signo, monotonía, extremos,...





2.- Representa razonadamente las siguientes funciones, contestando en cada una las propiedades y características que se indican

a) $y = f(x) = -5$

Tipo de función, dominio, recorrido, simetría, monotonía, signo, cortes con los ejes.

b) $x = 6$

c) $y = f(x) = -5x + 1$

Tipo de función, dominio, recorrido, simetría, monotonía, signo, cortes con los ejes.

¿Cuánto vale la pendiente? ¿Cuánto vale la ordenada en el origen?

d) $y = f(x) = 2x$

Tipo de función, dominio, recorrido, simetría, monotonía, signo, cortes con los ejes.

¿Cuánto vale la pendiente? ¿Cuánto vale la ordenada en el origen?

e) $y = f(x) = -x^2 + 3x$

Tipo de función, dominio, recorrido, simetría, monotonía, signo, cortes con los ejes, vértice, curvatura, extremos.

f) $y = f(x) = 5x^2$

Tipo de función, dominio, recorrido, simetría, monotonía, signo, cortes con los ejes, vértice, curvatura, extremos. Da dos valores a la x y obtienes la y .

g) $y = f(x) = x^2 - 5x + 4$

Tipo de función, dominio, recorrido, simetría, monotonía, signo, cortes con los ejes, vértice, curvatura, extremos.



TEMA 9: ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

1.- ECUACIONES EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales son aquellas que tienen la incógnita en el exponente.

Para resolverlas,

- Tipo 1 (función exponencial multiplicando o dividiendo):

Se tendrán en cuenta las propiedades de las potencias, se hacen cálculos hasta tener una igualdad de dos potencias de la misma base, con lo que podremos igualar los exponentes y terminar la ecuación. Si no se obtienen potencias de la misma base se tendrán que utilizar logaritmos.

Se calcula escribiendo ambos lados de la ecuación en potencias de la misma base para poder igualar los exponentes: ej. $3^{x-2} = 27$

(cuando las bases de las potencias igualadas no coinciden se aplica en ambos términos de la ecuación la operación de logaritmo)

- Tipo 2 (suma o resta de funciones exponenciales):

Se realiza un cambio de variable que más tarde se deshace para obtener el resultado:

ej. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+2} = 93$

Ejercicios de ecuaciones exponenciales:

1.- a) $3^{3x-2} = 81$ b) $5^{\frac{x-3}{4}} = 25$ c) $3^{\frac{2x+1}{3}} = 27$ d) $4^{\frac{2x-3}{5}} = 64$ e) $4^{x^2-11x+30} = 4^2$
 f) $7^{x^2-3x+2} = 1$ g) $7^{3x-2} = 2401$ h) $6^{\frac{1-3x}{4}} = 1296$ i) $10^{\frac{3x-1}{2x+1}} = 100$ j) $e^{x-1} = e^{2(x+1)}$
 k) $9^{x-2} = 3^{3x+1}$ l) $2^{x+5} = 8^{x-1}$ m) $3^{2x-3} = 27^{\frac{x+1}{3}}$ n) $5^{3x+1} = 25^{x-5}$ o) $5^{x^2-5x+6} = 1$

2.- a) $3^{2x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} = 3$ b) $2^{2x-1} - 6 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$ c) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$
 d) $7^{2x+1} - 2 \cdot 7^{x+1} + 7 = 0$ e) $5^{3x+2} + 3 \cdot 5^{6x+2} - 100 = 0$ f) $6^x - 9 \cdot 6^{-x} + 8 = 0$
 g) $3^{2(x+1)} - 18 \cdot 3^x + 9 = 0$ h) $2^{2x-1} - 5 \cdot 2^{x-1} + 2 = 0$ i) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 351$

3.-

a) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

b) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 120$

c) $4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} = 336$

d) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$

e) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

f) $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984$

g) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^x = 1023$

h) $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^x = 3280$

i) $1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^x = 5461$

j) $1 + 5 + 25 + 125 + \dots + 5^x = 3906$

k) $1 + 6 + 36 + 216 + \dots + 6^x = 9331$

l) $1 + 7 + 49 + 343 + \dots + 7^x = 137257$

Sistemas de ecuaciones exponenciales:

4.- a) $\begin{cases} 3^{2x+y} = 3^7 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5 \cdot 3^{x+1} - 2^y = 127 \\ 4 \cdot 3^{x-1} + 2 \cdot 2^y = 28 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^x \cdot 25^y = 5^7 \\ 2^{x-1} \cdot 2^{y+2} = 64 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^y = 60 \\ 4 \cdot 3^{x-1} + 2 \cdot 5^{y+1} = 286 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^x - 3^{y+1} = -713 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = -49 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x-2} + 4 \cdot 5^{y+1} = 512 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 5^{2y-1} = -215 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 3^{y-3} = 113 \\ 7 \cdot 4^{x-1} + 4 \cdot 3^y = 331 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 6 \cdot 10^{x-2} - 5 \cdot 5^{y-1} = -65 \\ 3 \cdot 10^{x+1} - 2 \cdot 5^{2y-3} = 29750 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 59 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 712 \\ 2^x - 3^{y-1} = 5 \end{cases}$

2.- LOGARITMOS

a) Definición: Dado un número $a > 0$ y $a \neq 1$, $\text{Log}_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$.

Ejemplo: $\text{Log}_3 81 = 4$ pues $3^4 = 81$

Como la base a es mayor que cero, no existe el logaritmo de un número negativo ni de cero, ya que la potencia de un número de base mayor que cero es siempre mayor que cero

b) Propiedades:

- 1) $\text{Log}_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$
- 2) $\text{Log}_a a = 1$ pues $a^1 = a$
- 3) $\text{Log}_a a^n = n$ pues $a^n = a^n$
- 4) El Logaritmo decimal es el que tiene base 10 y se escribe Log
- 5) El logaritmo de base el número e se llama Logaritmo neperiano y se escribe Ln
- 6) $\text{Log}_a (M \cdot N) = \text{Log}_a M + \text{Log}_a N$
- 7) $\text{Log}_a (M : N) = \text{Log}_a M - \text{Log}_a N$
- 8) $\text{Log}_a M^n = n \text{Log}_a M$
- 9) Si la base es mayor que 1, el logaritmo de un número mayor que la unidad es positivo y el logaritmo de un número menor que la unidad es negativo
- 10) Fórmula de cambio de base: $\text{Log}_a N = \frac{\text{Log} N}{\text{Log} a}$ $\text{Log}_a N = \frac{\text{Ln} N}{\text{Ln} a}$

Ejercicios de logaritmos:

1.- Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 4 =$ b) $\log_3 81 =$ c) $\log_5 125 =$ d) $\log_6 1296 =$ e) $\log 10\,000 =$

f) $\log_2 \frac{1}{4} =$ g) $\log_3 \frac{1}{27} =$ h) $\log_5 \frac{1}{625} =$ i) $\log 0,001 =$

2.- Halla el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_x 216 = 3$ b) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$ c) $\log_x \frac{1}{64} = -6$ d) $\log_x 81 = -4$ e) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

3.- Sabiendo que $\log 2 = 0'3010$ y $\log 3 = 0'4771$, calcula aplicando las propiedades:

a) $\log 9 =$ b) $\log 5 =$ c) $\log 18 =$ d) $\log 20 =$ e) $\log 48 =$ f) $\log 50 =$

g) $\log 14'4 =$ h) $\log 0'048 =$ i) $\log \sqrt[3]{240} =$ j) $\log \frac{\sqrt{5'4}}{12'8} =$ k) $\log 36000 =$

4.- Desarrolla aplicando las propiedades la siguiente formula $x = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^2}{c^6}}$

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log \sqrt{3x+4} + \frac{1}{2} \log(5x+1) = 1 + \log 3$ b) $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$

c) $(x^2 - 4x + 7) \log 5 + \log 16 = 4$ d) $3 \log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$

e) $2 \log x = \log \frac{x}{2} - 1$ f) $5 \log \frac{x}{2} + 2 \log \frac{x}{3} = 3 \log x - \log \frac{32}{9}$

g) $2 \log x = 3 + \log \frac{x}{10}$ h) $2 \log x - \log (x - 16) = 2$

i) $\log \sqrt{3x+1} - \log \sqrt{2x-3} = 1 - \log 5$ j) $\log(5x-3)^2 + \log(2x+3)^2 = 2$

k) $\frac{\log 3 + \log(11 - x^3)}{\log(5 - x)} = 2$ l) $\log(28 - x^3) - 3 \log(4 - x) = 0$

6.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x + \log_2 y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x + \log 5 = 3 \log 5 \\ \log x^3 + \log y^3 = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 2 \log y = -2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \log_x (y - 18) = 2 \\ \log_y (x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 33 \\ 2^{x+y} = 2^{11} \end{cases}$

TEMA 10: ESTADÍSTICA

1.- ESTADÍSTICA es la ciencia que observa los fenómenos de la vida y estudia e interpreta los resultados dando posibles soluciones.

La palabra "estadística" procede del vocablo "estado", pues era función principal de los gobiernos de los estados establecer registros de la población, etc.. La estadística se puede describir mejor, sin embargo, como una ciencia que estudia la interpretación de los datos numéricos, obtenidos mediante una encuesta o como resultado de un experimento aleatorio.

Dentro de la Estadística se distinguen dos ramas:

La estadística descriptiva: describe el fenómeno (recoge, anota y organiza los datos que se quiera estudiar), y analiza los datos (mira las veces que se repite cada resultado (hace el recuento), calcula valores que los representen, los ordena, los clasifica, construye tablas, se representan gráficos y estudia si hay alguna explicación teórica que los justifique)

La estadística inferencial: obtiene conclusiones y toma decisiones a partir del análisis de los datos. En esta fase se utiliza la probabilidad.

En este curso estudiamos la estadística descriptiva

2.- DEFINICIONES BÁSICAS.

a) Se llama **población**, universo o colectivo, al conjunto de todos los elementos que cumplen una determinada característica (motivo de la estadística). Los elementos de una población se denominan **individuos** o **unidades estadísticas**.

b) Se llama **muestra** a un subconjunto de la población. Una muestra es válida si es representativa de la población. Para ello los elementos deben ser elegidos de forma aleatoria: todos y cada uno de los elementos de la población tienen la misma posibilidad de formar parte de la muestra.

La muestra no es una porción cualquiera de la población, sino una porción representativa de ella. La composición de una muestra debe estar en proporción a la composición de la población a la que representa. Así, si se desea elegir una muestra formada por 1000 personas en la que el 60% de los individuos son mujeres, deberemos elegir para la muestra 600 mujeres y 400 hombres.

Al número de elementos de una muestra se le denomina **tamaño**.

c) Se llama **variable estadística** o **carácter estadístico** a una propiedad que permite clasificar a los individuos de una población o bien la cualidad observable en una población y que es el motivo de la estadística. Se distinguen dos tipos de caracteres estadísticos, cualitativos y cuantitativos:

- Caracteres estadísticos cuantitativos son aquellos que se pueden medir (como por ejemplo, la talla de un individuo). Es evidente que un carácter cuantitativo toma distintos valores según el individuo que se examine. El conjunto de todos los valores que puede tomar un carácter estadístico cuantitativo se llama variable estadística y se representa por x_i . Puede ser de dos tipos:

- discreta cuando la variable estadística toma valores aislados, esto es, entre dos valores consecutivos, no puede tomar los valores intermedios (ejemplo: número de amigos entre 2 y 5, solo puede ser 3 o 4)
- continua cuando la variable estadística puede tomar entre dos valores cualquier valor intermedios (ejemplo: altura entre 1,70 m y 1,80 m, puede ser 1,71, 1,715,...)

- Caracteres estadísticos cualitativos son aquellos que no se pueden medir (como por ejemplo, la profesión de una persona, sexo, color de pelo,...). Se llaman modalidades de un carácter estadístico a cada una de las diferencias que se pueden establecer dentro de un carácter estadístico cualitativo. Por ejemplo, son modalidades del carácter profesión de una persona: biólogo, abogado,...

Según esto, los caracteres cuantitativos determinan a las variables estadísticas mientras que los caracteres cualitativos determinan atributos (modalidades).

d) Se llama **frecuencia absoluta** del valor x_i y se representa por f_i al número de veces que se repite dicho valor.

Se llama **frecuencia relativa** del valor x_i y se representa por h_i al cociente entre la frecuencia absoluta de x_i y el número total de datos (N), que intervienen en la distribución: $h_i = f_i / N$

Se llama frecuencia absoluta acumulada (en sentido ascendente) del valor x_i , y se representa por F_i a la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores menores o iguales a x_i :

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

Las frecuencias acumuladas solo se pueden calcular en las variables cuantitativas.

e) Para analizar una muestra debemos seguir ordenadamente los siguientes puntos:

1. Recogida de datos: Consiste en tomar los datos numéricos procedentes de la muestra.
2. Ordenación de los datos: Colocarlos por orden creciente o decreciente.
3. Recuento de frecuencias: Contar los datos obtenidos.
4. Agrupación de datos: En el caso de que la variable sea continua o un número de datos grande (intervalos). (Ver nota)
5. Construcción de la tabla estadística: En dicha tabla estadística deberán figurar: a) Los valores de la variable - si es cuantitativa - o las modalidades - si es cualitativa - b) Las frecuencias: absolutas, relativas, acumulada y porcentual c) Los cálculos necesarios para facilitar el cálculo de los parámetros.

Nota:

En el caso de que la variable sea bien continua o bien discreta, pero con un número de datos muy grande, es aconsejable agrupar los datos en clases o intervalos de clase, que son subconjuntos del conjunto de valores que puede tomar la variable continua.

Para ello, hemos de tener en cuenta el rango o recorrido de la variable, que viene dado por la diferencia entre el valor máximo de la variable y el valor mínimo. El tamaño del intervalo es su amplitud, pueden ser constantes o variables, aunque debemos procurar que todos tengan la misma amplitud. Para hallar la amplitud del intervalo dividimos el recorrido por el número de intervalos n que queremos obtener.

No existe ninguna ley que nos diga el número de intervalos que debemos formar, un mayor número de intervalos implica una menor claridad pero una exactitud mayor y al contrario, un número menor de intervalos significa ganar en claridad de expresión y en facilidad de cálculo, al igual que supone menos precisión y exactitud. Norclife establece que el número de clases debe ser aproximadamente igual a la raíz cuadrada positiva del número de datos.

Los límites de un intervalo son los extremos de dicho intervalo; es aconsejable escoger los límites de modo que se sitúen en números enteros. Los intervalos se deben construir de tal forma que el límite superior de un intervalo coincida con el límite inferior del siguiente.

A los puntos medios de cada clase se les llama marca de clase.

3.- GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Diagrama de barras. Polígono de frecuencias

El diagrama de barras se utiliza para representar variables discretas. Sobre el eje horizontal o eje de las abscisas se indican los valores de la variable (un punto cualquiera para cada valor) y sobre el vertical o de las ordenadas las frecuencias que les corresponden. A continuación se levantan trazos gruesos o barras por los puntos marcados en el eje de las abscisas, de longitud igual a la de la frecuencia correspondiente a cada valor. Si trazamos una línea poligonal que una los extremos de las barras, obtenemos el polígono de frecuencias.

Si en vez de levantar barras, levantamos dibujos tenemos un **Pictograma**

Histograma. Polígono de frecuencias

El histograma se utiliza para representar variables cuantitativas continuas y cuando los datos se agrupan en intervalos. Sobre el eje horizontal se indican los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de base la amplitud del intervalo y altura la frecuencia. La línea poligonal que une los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo es el polígono de frecuencias.

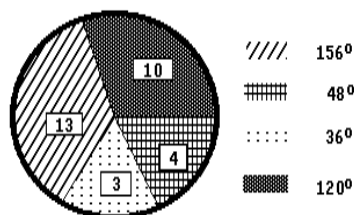
Diagrama de sectores

El diagrama de sectores se usa para cualquier tipo de variable. Los datos se representan en un círculo, siendo la amplitud del sector circular que corresponde a un dato x_i igual a 360° por la frecuencia relativa de x_i (también se puede calcular haciendo una sencilla regla de tres) Ejemplo:

La frecuencia de las vocales (a,e,i,o) que aparecen en una frase viene dada por la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} \text{Nº grados de a} &= \frac{10}{30} \cdot 360^\circ; \text{ Nº grados de e} = \frac{13}{30} \cdot 360^\circ; \text{ Nº grados de i} = \frac{4}{30} \cdot 360^\circ; \text{ Nº grados de o} \\ &= \frac{3}{30} \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

vocal	f_i	h_i
a	10	$\frac{10}{30}$
e	13	$\frac{13}{30}$
i	4	$\frac{4}{30}$
o	3	$\frac{3}{30}$



4.- PARÁMETROS

Una característica casi continua a lo largo de la estadística es el manejo de una gran cantidad de datos. Se ha visto ya que una forma de reducir la complejidad de los datos estadísticos de una distribución es la construcción de tablas estadísticas y las representaciones gráficas.

Uno de los fines más importantes de la estadística descriptiva es el de resumir o sintetizar esas grandes cantidades de datos en unos pocos números que nos proporcionan una idea, lo más aproximada posible, de toda la distribución. Estos números se conocen con el nombre de parámetros estadísticos.

En general, se llama **parámetros estadísticos** a ciertos valores característicos que representan los aspectos más destacables de dicha distribución y facilitan su estudio.

Vamos a estudiar dos tipos: Parámetros centralización o de posición y los parámetros de dispersión

4.1- Los parámetros centralización o de posición, sirven para estudiar las características de los valores centrales de la distribución atendiendo a distintos criterios.

Las medidas de posición más importantes son: la media aritmética, la mediana y la moda. También se utilizan los cuartiles y percentiles.

a) Media aritmética. Cálculo de la misma.

Se llama media aritmética de la variable x , $\bar{x}$, de una variable estadística a la suma de todos los valores de dicha variable (o de las marcas de clase para datos agrupados en intervalos) dividida por el número de valores.

Cálculo:

Sea x una variable estadística que toma los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, con frecuencias $f_1, f_2, \dots, f_n$ respectivamente, luego:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{N} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{N}$$

b) Moda: Mo

Es el valor que más veces se repite, es decir, el que tiene mayor frecuencia. Se calcula:

Variable discreta: Valor de mayor frecuencia absoluta.

Variable continua: Intervalo de la moda el de mayor frecuencia absoluta.

c) Mediana: Me

Si todos los valores que toma la variable están ordenados en forma creciente o decreciente, se llama mediana a aquel valor, x_m , que ocupa el lugar central si hay un número impar de datos, o, en caso de ser par, a la media aritmética de los valores centrales x_m y x_{m+1} . La mediana, tal como indica su definición, tiene la propiedad de que el 50% de los datos son menores o iguales que ella y el 50% restante son mayores o iguales que ella.

Para su cálculo distinguiremos dos casos:

- Mediana con datos no agrupados: Para calcular la mediana con datos no agrupados se ordenan los elementos en sentido creciente o decreciente y la mediana es el valor que ocupa el valor.

- Mediana con datos agrupados por frecuencias. Para calcular la mediana ordenamos los datos de la variable de menor a mayor y calculamos las frecuencias absolutas acumuladas. La mediana viene dada por el primer valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada exceda a la mitad del número de datos.

$$\text{Variable discreta} \begin{cases} \text{nº impar de datos : } M = x_m & m = \frac{N+1}{2} \\ \text{nº par de datos : } M = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{2} \end{cases}$$

Variable continua : Intervalo de la mediana el de frecuencia acumulada $F_i > \frac{N}{2}$

d) Cuartiles : Q_1, Q_2, Q_3

Son medidas que dividen el conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales, es decir, en cada tramo está el 25% de los datos recogidos en el estudio. Si todos los valores que toma la variable están ordenados en forma creciente o decreciente, se llaman cuartiles a los valores que ocupan los lugares que se indican: El primer cuartil, se representa por Q_1 , es el dato que ocupa el lugar $\frac{N}{4}$ de la

tabla. El segundo cuartil, se representa por Q_2 es el dato que ocupa el lugar $\frac{2N}{4}$ de la tabla. El tercer

cuartil, se representa por Q_3 es el dato que ocupa el lugar $\frac{3N}{4}$ de la tabla. Es decir:

$$Q_1(25\%), Q_2(50\%), Q_3(75\%)$$

El cálculo de los cuartiles se hace de forma análoga al cálculo de la mediana.

Los **percentiles**. P_k , son medidas que dividen el conjunto de datos en 100 partes iguales.

Nota: Q_2 coincide con la mediana y con P_{50} , Q_1 coincide con P_{25} , Q_3 coincide con P_{75} .

4.2- Los parámetros de dispersión: miden la mayor o menor concentración o dispersión de los valores alrededor de los parámetros de centralización.

Los más característicos son el rango o recorrido, la varianza y la desviación típica.

a) Rango o recorrido: R

El rango o recorrido es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la variable.

b) Desviación media: d_m

La desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de cada

dato :

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{N}$$

c) Varianza y desviación típica: σ^2 o $V(x)$ o $S^2(x)$

La **varianza** es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N}$

La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza, se representa por $S(x)$ o por σ ,
 $\sigma = +\sqrt{V(x)}$

d) Coeficiente de variación

El coeficiente de variación es el cociente entre la desviación típica y la media aritmética, se representa por $C V = \frac{\sigma}{x}$

Tiene que ser $CV < 1$

Nota: a menor valor de varianza, desviación típica y coeficiente de variación más homogéneos son los valores de la variable y viceversa.



RESUMEN DE FÓRMULAS ESTADÍSTICAS

Media aritmética ($\bar{x}$ o μ): $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{N}$

Mediana (Me) (valor central)

- Variable discreta $\left\{ \begin{array}{l} \text{nº impar de datos: } M = x_m \quad m = \frac{N+1}{2} \\ \text{nº par de datos: } M = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{2} \end{array} \right.$

- Variable continua : Intervalo de la mediana el de frecuencia acumulada $F_i > \frac{N}{2}$

Cuartiles

Cuartiles: Q_1 (25%), Q_2 (50%), Q_3 (75%)

Moda (M_o):

- Variable discreta: Valor de mayor frecuencia absoluta.

- Variable continua: Intervalo de la moda el de mayor frecuencia absoluta

Rango o recorrido: $R = \text{máx} (x_i) - \text{mín} (x_i)$

Varianza (S^2 ó σ^2)
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2$$

Desviación típica (S o σ)
$$S = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{S^2}$$

Coefficiente de variación (C V)
$$C V = \frac{\sigma}{x}$$



5.- ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

Si sobre una misma población se estudian dos propiedades o caracteres estamos en un caso de estadística bidimensional. En este caso las podemos estudiar separadamente o conjuntamente. Al estudiar conjuntamente las variables nos interesa ver si la relación entre ellas es funcional (existe una ecuación matemática que las relaciona) o aleatoria (no hay expresión matemática que las relaciona). En el caso de que la relación sea aleatoria estudiaremos si ésta es lineal fuerte o débil (estudio de la correlación) pues si es fuerte buscaremos la recta que más se aproxime a los datos de la variable (recta de regresión) y de esta manera transformamos la relación aleatoria en funcional y si sabemos un dato de una variable podremos encontrar el que le corresponde en la otra.

a) Variable estadística bidimensional es la variable obtenida al medir dos propiedades o caracteres (x, y) de un mismo fenómeno.

La variable estadística bidimensional se puede representar sobre unos ejes cartesianos, de manera que los valores correspondientes a x se sitúan en el eje de las abscisas y los correspondientes a y sobre el eje de las ordenadas. Cada par de valores (x, y) representa un punto del plano cartesiano y a la representación de este conjunto de puntos en el plano se le denomina **diagrama de dispersión o nube de puntos**.

b) Si todos los puntos se sitúan en una recta la relación es funcional lineal. Si no es así pero casi están alineados la relación es aleatoria fuerte. Si están muy dispersos la relación es débil.

Si en una variable bidimensional existe una relación o dependencia fuerte entre las dos variables, en el diagrama de dispersión la nube de puntos se puede ajustar mediante una recta, llamada recta de regresión, que establece la relación entre las dos variables. **La recta de regresión** es la recta que más se aproxima a todos los puntos del diagrama de dispersión y su ecuación es:

Recta de regresión de y sobre x:
$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x})$$

siendo la covarianza:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot f_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Recta de regresión de x sobre y:
$$x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2} (y - \bar{y})$$

c) Correlación es el grado de dependencia o relación que existe entre las variables.

Para estudiarla utilizamos el coeficiente de correlación que es el cociente entre la covarianza y el

producto de las desviaciones típicas:
$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

Interpretación:

$-1 \leq r \leq 1$:

- Si $r \approx -1$ o muy próxima a -1, correlación fuerte (las variables dependen una de otra) y negativa (cuando una aumenta, la otra disminuye), es decir, la recta es decreciente.

- Si $r \approx 1$ muy próxima a 1, correlación fuerte (las variables dependen una de otra) y positiva (cuando una aumenta, la otra también), es decir, la recta es creciente.

- Si $r = 0$, no existe relación, es decir, tienen independencia estadística.

Ejercicios de estadística:

1.- Un equipo ciclista quiere estudiar el estado de las bicicletas a lo largo de cuatro años. Toma una muestra de 20 bicicletas y mira los Kilómetros que han recorrido:

Kilómetros recorridos: x_i	1 000	1 500	1 600	2 000	2 100
Número de bicicletas: f_i	2	3	7	3	5

a) Representa en un polígono de frecuencias este resultado. b) Calcula la media, la mediana y la moda. c) Halla los cuartiles. d) Determina la varianza, la desviación típica y el rango o recorrido.

2.- Los siguientes datos corresponden al número de billetes vendidos en una atracción de feria en un mes: 10, 20, 7, 15, 25, 7, 5, 10, 10, 20, 25, 6, 3, 15, 16, 20, 25, 30, 45, 30, 10, 7, 15, 25, 10, 20, 25, 7, 15, 10.

a) Realiza una tabla y un polígono de frecuencias. b) Calcula los cuartiles. c) Encuentra la desviación típica.

3.- Una casa de neumáticos para coches quiere probar 20 de los que ha fabricado. Para ello los somete a una prueba que consiste en ver cuántos Kilómetros aguantan a alta velocidad durante 2 horas. EL resultado es el siguiente:

Kilómetros recorridos: x_i	100	200	300
Número de neumáticos: f_i	5	12	3

a) Representa en forma de pictograma este resultado. b) Calcula la media, la mediana y la moda. c) Determina la varianza, la desviación típica y el rango o recorrido.

4.- En un laboratorio de Física se quiere estudiar la resistencia de un material. Para ello se someten 20 bloques de este material a cinco pesos diferentes. Los resultados son los siguientes:

Peso (Kilopondios): x_i	100	200	300	400	500
Número de trozos que resisten : f_i	5	7	3	3	2

a) Representa en un polígono de frecuencias este resultado. b) Calcula la media, la mediana y la moda. c) Halla los cuartiles. d) Determina la varianza, la desviación típica y el rango o recorrido.

5.- Cáritas ha hecho un estudio sobre el número de niños abandonados en un año en veinte capitales de provincia, obteniendo los siguientes datos:

Número de niños: x_i	10	12	15	25	30
Número de capitales: f_i	2	6	3	5	4

- Calcula el número medio de niños abandonados.
- Averigua la desviación típica.
- Halla los cuartiles.

6.- Una ONG que se dedica a la preservación del medio ambiente realiza un estudio sobre el número de truchas que se han pescado en un río durante treinta días. El resultado es el siguiente:

Número de truchas: x_i	10	20	25	29	30
Número de días: f_i	2	10	9	5	4

a) Representa gráficamente este resultado. b) Calcula la media, la mediana y la moda. c) Determina la varianza, la desviación típica y el rango o recorrido.

7.- Una compañía aérea quiere saber el número medio de viajeros al cabo de un mes. Realiza un estudio y obtiene los siguientes resultados:

Número de viajeros x_i	Número de días: f_i
[0-300)	5
[300-600)	10
[600-900)	12
[900-1 200)	3

a) Representa gráficamente este resultado. b) Calcula la media c) Determina la varianza, la desviación típica y el rango o recorrido.

8.- Una cadena de comidas a domicilio quiere saber el tiempo medio que tardan en repartir a una determinada zona de la ciudad. Para ello manda a sus repartidores que apunten el tiempo que invierten. Preguntando a 25 repartidores, se obtuvieron los siguientes resultados:

Tiempo: x_i	[10, 12)	[12, 14)	[14, 16)	[16, 18)
Número de repartidores: f_i	8	12	4	1

a) Representa la información en un histograma b) Calcula el tiempo medio y la desviación típica.

9.- La Inspección Técnica de Vehículos de la Comunidad de Castilla y León quiere saber cuántos vehículos pasan al año que no superan el test de gases contaminantes. Preguntados treinta centros de inspección se consiguieron los siguientes resultados:

Número de vehículos: x_i	[0, 3)	[3, 6)	[6, 9)	[9, 12)
Número de ITV: f_i	5	2	10	13

a) Representa la información en un histograma b) Calcula el número medio de vehículos que no superan el test y halla la desviación típica.

10.- Una compañía discográfica quiere estudiar el número de discos vendidos por un grupo de música independiente. Para ello realiza un seguimiento de las ventas durante un mes y llega a los siguientes resultados:

Número de discos x_i	Número de días: f_i
[100-200)	10
[200-300)	15
[300-400)	3
[400-500)	2

a) Representa la información en un histograma b) Calcula el número medio de discos vendidos y halla la desviación típica.

11.- La protectora de animales quiere investigar el número de perros abandonados durante los meses de verano en una ciudad. Encarga, durante 70 días, un estudio estadístico del número de perros abandonados en la calle. Los resultados del estudio han sido:

Número de perros: x_i	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)
Número de días: f_i	20	10	15	17	8

a) Representa en un polígono de frecuencias este resultado. b) Halla el número medio de perros abandonados. c) Determina la varianza y la desviación típica.

12.- Las cifras siguientes corresponden al número de pólizas que una compañía de seguros realiza durante los meses de un año y al número de accidentes que ocurren al mes:

Pólizas	30	35	52	60	83	47	25	30	82	100	53	47
---------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	----	----

Accidentes	10	15	25	42	12	20	15	18	33	26	10	35
------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

13.- Los gastos de publicidad de una empresa, en millones de pesetas, y sus correspondientes ventas, también en millones de pesetas, son las registradas en la tabla:

Publicidad x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Ventas y_i	15	16	14	17	20	18	18	19

Calcular:

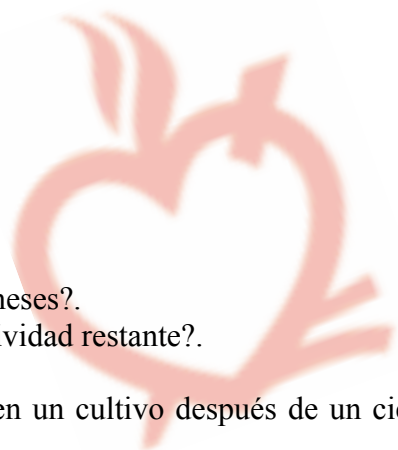
- Las medias de X e Y.
- Las varianzas de X e Y.
- La covarianza $S_{xy}(X, Y)$.
- El coeficiente de correlación lineal e interpretarlo. En el caso de que sea interesante, hallar la recta de regresión.

14.- Determinada la pérdida de actividad de un preparado hormonal en el curso del tiempo, se obtuvo el resultado registrado en esta tabla:

Tiempo en meses x_i	1	2	3	4	5
%de actividad restante y_i	90	75	42	30	21

- Representar el diagrama de dispersión.
- Hallar la media y las desviaciones típicas.
- Hallar la covarianza.
- Hallar el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo.
- ¿Qué tanto por ciento de actividad restante quedará a los seis meses?
- ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que quede el 50% de actividad restante?

15.- El número de bacterias por unidad de volumen, presentes en un cultivo después de un cierto número de horas, viene expresado en la siguiente tabla:



Número de horas x_i	0	1	2	3	4	5
Nº de bacterias y_i	12	19	23	34	56	62

Calcular:

- Las medias y desviaciones típicas de las variables número de horas y número de bacterias.
- La covarianza de la variable bidimensional.
- El coeficiente de correlación lineal.
- ¿Qué número de bacterias cabe esperar que habrá transcurridas 6h30'?

16.- Dada la siguiente variable bidimensional :

x_i	2	3	4	5	6
y_i	4	2	5	4	6

Calcular:

- Las medidas de x e y .
- Las varianzas de x e y .
- La covarianza de (x,y) .
- El coeficiente de correlación lineal e interpretarlo. En el caso de que sea interesante, hallar la recta de regresión

17. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de escolares en una batería de tests mediante los que se trata de medir la habilidad verbal y el razonamiento abstracto, son las siguientes:

Habilidad verbal x_i	Razonamiento abstracto y_i	f_i
[10-20)	[15-25)	5
[10-20)	[25-35)	2
[20-30)	[15-25)	3
[20-30)	[25-35)	6
[20-30)	[35-45)	1
[30-40)	[25-35)	1
[30-40)	[35-45)	4
[30-40)	[45-55)	3
[30-40)	[55-65)	1
[40-50)	[35-45)	2
[40-50)	[45-55)	3
[40-50)	[55-65)	2

Calcular:

- Las medias y varianzas de las variables de habilidad verbal y razonamiento abstracto.
- La covarianza.
- El coeficiente de correlación lineal.
- ¿Qué puntuación en razonamiento abstracto es previsible que obtenga un alumno que tuvo 45 en habilidad verbal?



Soluciones de los problemas estadística:

- 1.- b) $\bar{x} = 1710$ km, $M_0: x_i = 1600$, $M_e: x_i = 1600$; c) $Q_1: x_i = 1550$, $Q_2 = M_e$, $Q_3: x_i = 2050$ d) $S^2 = \sigma^2 = 2741900$, $S = \sigma = 1655'87$, $r = 1100$
- 2.- b) $Q_1: x_i = 10$, $Q_2: x_i = 15$, $Q_3: x_i = 2$ c) $S = \sigma = 9'38$
- 3.- b) $\bar{x} = 190$, $M_0: x_i = 200$, $M_e: x_i = 200$; c) $S^2 = \sigma^2 = 3900$, $S = \sigma = 62'45$, $r = 200$
- 4.- b) $\bar{x} = 250$, $M_0: x_i = 200$, $M_e: x_i = 200$; c) $Q_1: x_i = 150$, $Q_2 = M_e$, $Q_3: x_i = 350$ d) $S^2 = \sigma^2 = 16500$, $S = \sigma = 128'45$, $r = 400$
- 5.- a) $\bar{x} = 19'1$, $M_0: x_i = 12$, $M_e: x_i = 15$; b) $S = \sigma = 7'64$ c) $Q_1: x_i = 12$, $Q_2 = M_e$, $Q_3: x_i = 25$
- 6.- b) $\bar{x} = 23'66$, $M_0: x_i = 20$, $M_e: x_i = 25$; c) $S^2 = \sigma^2 = 27'87$, $S = \sigma = 5'27$, $r = 20$
- 7.- b) $\bar{x} = 580$; c) $S^2 = \sigma^2 = 70100$, $S = \sigma = 264'76$, $r = 1200$
- 8.- b) $\bar{x} = 12'84$, $S = \sigma = 1'59$
- 9.- b) $\bar{x} = 7'6$, $S = \sigma = 3'23$
- 10.- b) $\bar{x} = 240$, $S = \sigma = 83'06$
- 11.- b) $\bar{x} = 21'28$; c) $S^2 = \sigma^2 = 48'17$, $S = \sigma = 6'94$
- 12.- más dispersos los accidentes
- 13.- a) $\bar{x} = 4'5$, $\bar{y} = 17'13$ b) $S_x^2 = \sigma_x^2 = 5'25$, $S_y^2 = \sigma_y^2 = 3'61$
 c) $S_{xy} = \sigma_{xy} = 3'31$ d) $r = 0'76$ Correlación positiva. Dependencia aleatoria débil.
- 14.- b) $\bar{x} = 3$, $S_x = \sigma_x = 1'41$, $S_y = 26'52$, $\bar{y} = 51'6$, c) $S_{xy} = \sigma_{xy} = 36'6$
 d) $r = -0'98$ Correlación negativa, dependencia aleatoria fuerte.
 e) $y - 51'6 = -18'3(x - 3) \Rightarrow y = -18'3x + 106'5$ $x = 6 \Rightarrow y = -3'3$
 f) $x - 3 = -0'05(y - 51'6) \Rightarrow x = -0'05y + 5'58$ $y = 50 \Rightarrow x = 3'08$
- 15.- a) $\bar{x} = 2'5$, $\bar{y} = 34'3$, $S_x = 1'71$, $S_y = 18'7$ b) $S_{xy} = 31$
 c) $r = 0'97$ Correlación positiva y de dependencia aleatoria fuerte.
 d) $y - 34'33 = 10'62(x - 2'5) \Rightarrow y = 10'62x + 7'78$ si $x = 6'5 \Rightarrow y = 76'81 @ 77$ bacterias.
- 16.- a) $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 4'2$ b) $S_x^2 = 2$, $S_y^2 = 1'76$
 c) $S_{xy} = 1'2$ d) $r = 0'64 \Rightarrow$ correlación positiva y dependencia aleatoria débil.
- 17.- a) $\bar{x} = 29'85$, $\bar{y} = 36'06$, $S_x^2 = \sigma_x^2 = 109'76$, $S_y^2 = \sigma_y^2 = 163'27$
 b) $S_{xy} = \sigma_{xy} = 109'97$ c) $r = 0'82$ $y = x + 6'21$ si $x = 45 \Rightarrow y = 51'21$

TEMA 11:PROBABILIDAD

En la naturaleza podemos encontrar dos tipos de fenómenos o experimentos: deterministas y aleatorios.

Experimentos deterministas son los que se pueden saber los resultados antes de realizarlos. Sus resultados siguen una ley física.

Experimentos aleatorios son los que no se pueden saber los resultados antes de realizarlos. Pueden dar lugar a varios resultados sin que se pueda saber, sin realizar el experimento previamente, cual de ellos va a ocurrir.

1.- SUCESOS:TIPOS DE SUCESOS

a) Espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento. Se representa por la letra E .

Se llama **suceso aleatorio** asociado al experimento aleatorio a cada uno de los subconjuntos que se pueden formar con los resultados del espacio muestral. Existen distintos tipos de sucesos:

- **Suceso seguro** el que ocurre siempre que se realiza el experimento y coincide con E .
- **Suceso imposible**, cuando no ocurre nunca. Se designa por ϕ
- **Suceso elemental**. Cualquier resultado posible de un experimento aleatorio es un suceso elemental. Cualquier elemento de E es un suceso elemental.
- **Suceso compuesto** el que está formado por varios sucesos elementales.
- Dado un suceso A se llama **suceso contrario o complementario** de A al que se verifica siempre que no se verifique A . Se le representa por $\bar{A}$.

$$\bar{E} = \phi \quad \phi = E$$

- **Sucesos dependientes e independientes:**

Cuando en un experimento aleatorio el resultado de un suceso no condiciona el resultado de otro suceso consecutivo decimos que los sucesos son independientes. En caso contrario los sucesos son dependientes.

- **Experimentos aleatorios compuestos:**

Los experimentos que resultan de combinar varios experimentos simples reciben el nombre de experimentos compuestos o complejos. Ejemplo: experimento que consiste en lanzar un dado y una moneda

b) Diagrama en árbol.

Un diagrama en árbol es una representación gráfica de los posibles sucesos de un experimento.

2.- OPERACIONES CON SUCESOS

a) Dados dos sucesos A , B , se llama **unión** (o suma) de los sucesos A y B , y se representa por $A \cup B$, al suceso que consiste en verificarse A o B o ambos.

La unión de sucesos cumple las siguientes propiedades: $A \cup \phi = A$, $A \cup \bar{A} = E$, $A \cup A = A$

b) Se llama **intersección** (o producto) de A y B , y se representa por $A \cap B$, al suceso que consiste en verificarse ambos sucesos a la vez.

La intersección de sucesos cumple las siguientes propiedades:

$$A \cap E = A \quad A \cap \bar{A} = \phi \quad A \cap A = A$$

c) Dos sucesos asociados a un experimento aleatorio son **incompatibles** si no pueden verificarse simultáneamente: A y B son incompatibles, si el suceso $A \cap B$ no puede darse nunca y es el suceso imposible; A y B son compatibles, si el suceso $A \cap B$ no es el suceso imposible.

d) Otra operación de sucesos es la **diferencia**: $A - B = A \cap \bar{B}$

3.- FRECUENCIA RELATIVA Y PROBABILIDAD

Sea A un suceso asociado a un determinado experimento aleatorio. Efectuamos N pruebas y representamos por n el número de veces que se ha realizado A en las N pruebas.

Frecuencia absoluta es el número de veces que se ha realizado A en el conjunto de pruebas, es decir, n.

Frecuencia relativa es el cociente entre el número de veces que se ha realizado A en el conjunto de pruebas, es decir, n y el número total de pruebas, es decir N: $f_r(A) = \frac{n}{N}$

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente.

Este número al que la frecuencia relativa de un suceso se acerca más cuanto mayor es el número de pruebas realizadas recibe el nombre de **probabilidad del suceso** y se representa por P (A)

Propiedades de la probabilidad

1) la probabilidad de un suceso es siempre un número real comprendido entre cero y uno :

$0 \leq P(A) \leq 1$. La probabilidad de un suceso cualquiera del espacio de sucesos es positiva o nula.

2) La probabilidad del suceso seguro es la unidad: $p(E) = 1$.

3) La probabilidad del suceso imposible es cero: $p(\emptyset) = 0$.

4) Si A y B son sucesos incompatibles $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

5) Si A y B son dos sucesos compatibles $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

6) La probabilidad del suceso contrario de un suceso es iguala la unidad menos la probabilidad del suceso $\Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

7) Si $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

8) $P(A) \leq 1$

9) La probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

10) $P(A-B) = p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$.

4.- REGLA DE LAPLACE.

Sea E un espacio muestral y sean $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ los n sucesos elementales de E. Si todos ellos son equiprobables y A es el suceso formado por k sucesos elementales, se tiene que:

$$P(A) = k / n$$

Es decir, que la probabilidad del suceso A es igual al cociente entre el número de sucesos favorables al suceso A y el número de casos posibles del experimento.

NOTA: Casos posibles son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral. Casos favorables son los elementos que componen el suceso A.

Ejercicios de probabilidad:

1.- Sea el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y una moneda. Si A es el suceso que la moneda salga cruz y B es el suceso de obtener 1 ó 2 con el dado, indicar el significado de los siguientes sucesos:

a) $\bar{A}$ b) $\bar{B}$ c) $A \cup B$ d) $\bar{A} \cup \bar{B}$

2.- El espacio muestral relativo a un experimento aleatorio es $E = \{1,2,3,4\}$ y se consideran los sucesos $A = \{1,2\}$ $B = \{2,4\}$ $C = \{1,4\}$ Calcular los siguientes sucesos:

a) $\bar{A}$ b) $\bar{B}$ c) $A \cup B$ d) $\bar{A} \cup \bar{B}$ e) $C \cup B$ f) $A \cap B$ g) $C \cap B$ h) $A \cap C$

3.- Sean A, B y C tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresar mediante operaciones con sucesos los siguientes:

- a) se verifica A y C pero no B.
- b) Se verifica al menos uno de los tres sucesos.
- c) Se verifican al menos dos sucesos.
- d) No se verifica ninguno de los tres.
- e) Se verifica uno solo de los tres sucesos.

4.- se considera el experimento aleatorio de lanzar al aire dos dados y anotar los resultados. Se pide:

- a) El espacio muestral.
- b) Elementos del suceso "obtener siete puntos".
- c) Elementos del suceso "obtener ocho puntos".
- d) Elementos del suceso "obtener al menos ocho puntos".

5.- Se lanzan dos dados de distintos colores sobre una mesa y se anotan los números obtenidos. Determinar por extensión los sucesos A y B siguientes:

- A: "sacar al menos un seis".
- B: "sacar sólo un seis"

6.- . Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describir el espacio muestral cuando:

- a) La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.
- b) La primera bola no se devuelve.
- c) La aparición de al menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

7.- Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?.

8.- ¿Cuál es la probabilidad de sacar de una sola vez dos bolas blancas o dos bolas rojas de una urna que contiene 5 bolas blancas y 7 bolas rojas?

9.- Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

- a) La probabilidad de que salga el siete.
- b) La probabilidad de que el número obtenido sea par.
- c) La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3.

10.- La probabilidad de que un hombre viva 20 años es $\frac{1}{4}$ y la que su mujer viva 20 años es $\frac{1}{3}$. Se pide calcular la probabilidad:

- a) de que ambos vivan 20 años.
- b) de que el hombre viva 20 años y su mujer no.
- c) de que ambos mueran antes de los 20 años.

11. -¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado tres veces aparezca siempre el mismo número?

12.- En un cierto conjunto de números naturales la probabilidad de que uno de ellos sea divisible para 2 es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que sea divisible para 5 es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que sea divisible para 10 es $\frac{1}{12}$. ¿Cuál es la probabilidad de que un número de ese conjunto sea divisible para 2 ó para 5?

13.- Determinar la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

- a) La obtención de 6 puntos en una sola tirada de dos dados.
- b) La aparición de un rey al extraer una carta de una baraja de 40 cartas.
- c) La aparición de al menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

14.- De una caja que contiene 5 bolas blancas, 5 rojas y 4 azules, se extrae una al azar. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea:

- a) blanca; b) roja; c) azul; d) no blanca; e) roja o azul

15.- Hallar la probabilidad de obtener al menos un 3 en dos lanzamientos de un dado.

16.- . Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) Obtener 8 puntos en una sola tirada de dos dados.
- b) Obtener en una sola tirada con dos dados una suma de 7 u 11.
- c) Obtener al menos una cara en tres lanzamientos con una moneda.

17.- Hallar la probabilidad de que al lanzar un dado dos veces salga al menos un 4.

18.- Se sacan al azar dos cartas de una baraja de 40 cartas. Hallar la posibilidad de que las dos sean oros. Hallar la posibilidad de que una sea oros y la otra espadas.

19.- En una caja hay 15 lámparas, de las que 5 son defectuosas. Se eligen 3 al azar. Hallar la probabilidad de que:

- a) ninguna sea defectuosa.
- b) una exactamente sea defectuosa.

20.- En una urna hay seis bolas blancas, cinco amarillas, siete azules, cinco rojas y nueve verdes. Se extrae una bola al azar. Hallar la probabilidad de que sea azul, roja o amarilla.

21.- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6 la suma sea 18?

22. -¿Cuál es la probabilidad de sacar un 5, por lo menos, al tirar un dado dos veces?

23.- Se sacan sucesivamente tres cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean del mismo palo?

- 24.- Se sacan sucesivamente tres cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que cada una sea de palo diferente?
- 25.- Una urna contiene ocho bolas rojas y cuatro bolas blancas. Se sacan tres bolas de la urna, una tras otra. Hallar la probabilidad de que las dos primeras sean rojas, y la tercera blanca.
- 26.- Se sacan 4 cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean de oros?
- 27.- De una baraja de 40 cartas se sacan sucesivamente dos al azar. Hallar la probabilidad de que la primera sea caballo y la segunda rey.
- 28.- Calcular la probabilidad de que al extraer dos cartas de una baraja española salgan: a) dos figuras; b) por lo menos una figura; c) una un tres y la otra un as;
Considerar las dos posibilidades: a) con reemplazamiento y b) sin reemplazamiento.
- 29.- Una urna A contiene 4 bolas blancas y 6 rojas y otra B contiene 7 bolas blancas y 5 rojas. Se saca una bola de la urna A y se pasa a la urna B. Se extrae una bola de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?
- 30.- Una urna contiene 9 bolas blancas y 7 bolas negras. Hallar la probabilidad de que en dos extracciones consecutivas ambas bolas sean negras sabiendo:
a) que la primera bola se reintegra a la urna antes de la segunda extracción.
b) que la primera bola no se reintegra.
- 31.- Un aparato consta de dos partes A y B. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de que la parte A salga defectuosa es 0,1 y la probabilidad de un defecto en B es de 0,03. ¿Cuál es la probabilidad de que el aparato sea defectuoso?
- 32.- Una urna contiene 2 bolas blancas y 3 negras y una segunda urna contiene 4 bolas blancas y 2 negras. Se trasladan dos bolas de la primera urna a la segunda y a continuación se extrae una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- 33.- Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara se introduce en la urna una bola blanca y si sale cruz se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y a continuación se introduce la mano en la urna y se saca una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna quede una bola blanca y la otra negra?
- 34.- La caja A contiene 5 fichas azules y 3 rojas, y la caja B contiene 4 azules y 6 rojas. Se traslada una ficha de la caja A a la caja B, a continuación se extrae una ficha de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?
- 35.- Con los datos del problema anterior, se trasladan dos fichas de la caja A a la caja B, después se extrae una ficha de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha extraída sea azul?
- 36.- La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, otra urna contiene 2 bolas blancas y 4 negras. Se saca una bola de A y sin verla se echa en la urna B. Después se saca una bola de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sacada sea negra?
- 37.- Se tiene una bolsa con nueve bolas numeradas del uno al nueve. Se realiza un experimento que consiste en la extracción de una bola de la bolsa, se anota el número y se reintegra a la bolsa.

- a) Halla el espacio muestral.
- b) Construye los siguientes sucesos:
 - A= "obtener número par".
 - B= "obtener número primo".
 - C= "obtener múltiplo de tres".
- c) Calcula la probabilidad de los sucesos anteriores



Soluciones ejercicios probabilidad:

1) a) Suceso salga cara. b) Salga 3 ó 4 ó 5 ó 6 c) Salga cruz ó 1 ó 2. d) Salga cara ó 3 ó 4 ó 5 ó 6

2) a) {3,4} b) {1,3,} c) {1,2,4} d) {1,3,4} e) {1,2,4} f) {2} g) {4} h) {1}

3) a) $A \cap \bar{B} \cap C$ b) $A \cup B \cup C$ c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

d) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ e) $(B \cap \bar{C} \cap \bar{A}) \cup (\bar{B} \cap C \cap \bar{A}) \cup (\bar{B} \cap \bar{C} \cap A)$

4) b) {1,6} (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)}

c) {(2,6) (3,5) (3,6) (4,4) (4,5) (4,6) (5,3) (6,2)}

d) {(2,6) (3,5) (3,6) (4,4) (4,5) (4,6) (5,3) (5,4) (5,6) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)}

5) $A = \{(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5)\}$

$B = \{(1,6) (2,6) (3,6) (5,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5)\}$

6) a) {(B,B) (B,R) (B,V) (B,N) (R,B) (R,N) (R,V) (R,R) (V,B) (V,R) (V,N) (V,V) (V,R) (N,B) (N,R) (N,N) (N,V)}

b) {(B,R) (B,V) (B,N) (R,B) (R,V) (R,N) (V,B) (V,R) (V,N) (N,B) (N,R) (N,V)}

8) $P(B\bar{B}\bar{E}RR) = 5/33 + 7/22$ 7) $P(R\bar{E}B) = 9/15$ $P(\bar{B}) = 10/15$

9) $P(S 7) = 6/36$ $P(S \text{ par}) = 18/36$ $P(S 3) = 12/36$

10) $P(H\bar{C}M) = 1/12$ $P(H\bar{C}M) = 1/6$ $P(H\bar{C}M) = 1/2$

11) $1/36$ 12) $P(2\bar{E}5) = 5/12$

13) a) $5/36$ b) $1/10$ c) $3/4$

14) a) $5/14$ b) $5/14$ c) $4/14$ d) $9/14$ e) $9/14$

15) $11/36$ 16) a) $5/36$ b) $8/36$ c) $7/8$

17) $11/36$ 18) $9/156$; $5/39$ 19) a) $72/273$ b) $45/91$ 20) $17/32$

21) $1/6^3$ 22) $11/36$ 23) $12/247$ 24) $25/247$

25) $28/165$ 26) $21/9139$ 27) $2/195$

28) a) $9/100$; $51/100$; $1/50$ b) $11/130$; $67/130$; $4/195$

29) $28/65$ 30) a) $49/256$ b) $70/40$

31) 0.1297 32) $3/5$ 33) $1/2$

34) $51/88$ 35) $49/112$ 36) $P(B)=19/56$ $P(N)=37/56$

37) a) {1,2,3,4,5,6,7,8,9} b) $A = \{2,4,6,8\}$ $B = \{1,2,3,5,7\}$ $C = \{3,6,9\}$

c) $P(A) = 4/9$ $P(B) = 5/9$ $P(C) = 3/9$



TEMA 12: SEMEJANZAS

1.- RECUERDO DE SEMEJANZAS.

Se llama **razón** entre segmentos al cociente entre sus longitudes.

Segmentos proporcionales son los que entre sus longitudes se puede establecer igualdades de razones (una proporción).

Teorema de Thales : Si se cortan dos rectas concurrentes por varias paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a los segmentos determinados en la otra.

Dos **figuras son semejantes** cuando tienen la misma forma, pero distinto tamaño. La razón constante entre dos segmentos homólogos (correspondientes en la semejanza) se denomina razón de semejanza.

Los **ángulos homólogos** (correspondientes en la semejanza) son iguales.

Los lados que unen vértices homólogos son **lados homólogos**.

Dos figuras son semejantes cuando tienen los lados homólogos proporcionales y los ángulos homólogos iguales.

Si trazamos un segmento paralelo a uno de los lados de un triángulo, el triángulo parcial que resulta es semejante al triángulo inicial. Se dicen que están en posición de Thales.

Por formarse al trazar la altura correspondiente a la hipotenusa tres triángulos semejantes (los dos que se forman y el inicial) se pueden formar proporciones entre sus lados y dan lugar a tres importantes teoremas de los triángulos rectángulos:

- **Teorema del cateto**: En todo triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.
- **Teorema de la altura**: En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que en ella determina.
- **Teorema de Pitágoras**: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2.- MOVIMIENTOS DEL PLANO

Un movimiento es una transformación puntual del plano que a toda figura F le hace corresponder otra F' , conservando las distancias y los ángulos (igual en tamaño y forma).

Un movimiento es directo si el sentido es el mismo e indirecto si el sentido de una es contrario al de la otra.

Traslación: Movimiento directo que a cada punto P de la figura le hace corresponder otro P' mediante la aplicación de un vector, llamado vector de traslación. Los puntos que se corresponden se llaman homólogos.

Sea $P(x, y)$ y queremos hacer una traslación de vector $\vec{v}(a, b)$, las coordenadas del punto P' homólogo de P se obtienen sumando a las coordenadas de P las componentes de $\vec{v}$:

$$P'(x', y') = P'(x+a, y+b)$$

Si queremos aplicar varias traslaciones seguidas aplicaremos a cada punto el vector que resulta de sumar todos los vectores traslación de las traslaciones que queramos realizar.

Giro: Dado un punto fijo O (llamado centro de giro) y un ángulo orientado α (ángulo de giro). Se llama giro al movimiento directo que deja invariante el punto O y a cada punto P le hace corresponder otro P' que cumple:

$\overline{OP} = \overline{OP'}$ y el ángulo $\angle POP' = \alpha$, Representamos el giro: $G(O, \alpha)$

Si tenemos varios giros consecutivos con el mismo centro, aplicaremos como ángulo de giro la suma de los ángulos de giro que queremos realizar.

Simetría axial: Dada una recta r (eje de simetría), se llama simetría axial o simetría respecto de un eje a la transformación o movimiento indirecto que a cada punto P de una figura le hace corresponder otro P' de modo que la recta r es mediatriz del segmento PP'. La figura queda igual pero invierte el sentido de esta.

Simetría central: Dado un punto fijo O (centro de simetría) se llama simetría central o simetría respecto a ese punto a la transformación o movimiento directo que a cada punto P la hace corresponder otro punto P' alineado con P y O, tal que $\overline{OP} = -\overline{OP'}$. Una simetría central equivale a un giro de 180° .

Homotecia: Dado un punto O, y un número real k, distinto de cero, se llama homotecia de centro O y razón k a la transformación puntual que a cada punto A de una figura le hace corresponder un punto A' alineado con O y A, de modo que se verifica la relación $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA} \Leftrightarrow k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, las

figuras que quedan son semejantes.

La homotecia de centro O y razón k se escribe : $H(O,k)$

La razón de segmentos homotéticos u homólogos se denomina razón de homotecia o razón de semejanza. Todos los puntos homotéticos están alineados. Las rectas homotéticas son paralelas, los ángulos homotéticos son iguales, los segmentos homotéticos son proporcionales.

Si $k > 0$ se dice que la homotecia es directa y los puntos homotéticos están en la misma semirrecta con origen O. Si $k < 0$ se llama homotecia inversa y los puntos homotéticos están a distinto lado del centro de homotecia.

Si $k=1$ la homotecia es una identidad. Si $k = -1$, la homotecia es una simetría respecto a O.

El producto de homotecias con el mismo centro es otra homotecia de igual centro y cuya razón es igual al producto de las razones de las homotecias.

3.- DEFINICIONES INTERESANTES

Greca es el adorno en edificios, muebles y objetos formado por elementos geométricos repetidos.

Cenefa es una estrecha banda ornamental formada por dibujos que se repiten. Se utiliza como remate en los bordes.

Friso es una franja decorativa situada bajo una cornisa o en la parte alta de una pared. En todos estos motivos ornamentales el dibujo se forma por una traslación del dibujo base.

Mosaico es una formación de losetas que se utiliza para cubrir suelos, fachadas etc.

Si utilizamos polígonos iguales o distintos, unos al lado de otros, cubriendo el plano, de forma que no queden huecos (teselar el plano), habremos construido un mosaico. Para que no queden ángulos la suma de los ángulos que concurren en un vértice tiene que ser 360° .

Todos los mosaicos tienen un motivo mínimo que se repite

Ejercicios de semejanzas:

- 1.- Halla el trasladado del punto $c(-1,4)$, mediante el vector $\vec{v}(-3,1)$
- 2.- Si los extremos de un segmento son $A(3,2)$ y $B(7,-1)$, halla las coordenadas del segmento $\overline{A'B'}$, homólogo de $\overline{A,B}$, en la traslación definida por $\vec{v}(7,4)$
- 3.- ¿Qué coordenadas tendrá el punto $P(7,-3)$ al aplicarle sucesivamente unas traslaciones definidas por los vectores $\vec{u}(3,5)$, $\vec{v}(-5,2)$ y $\vec{w}(2,2)$?
- 4.- Dibuja un segmento y tomando como centro de giro un punto cualquiera del plano, realiza un giro de ángulo 45°
- 5.- Dibuja un triángulo y tomando como centro de giro un punto cualquiera del plano, realiza un giro de ángulo 30°
- 6.- En el plano cartesiano, toma el origen de coordenadas $O(0,0)$ como centro de giro. Sobre el eje de las abscisas, toma el punto $P(5,0)$. Si le aplicas dos giros de 30° y 60° , respectivamente, ¿cuáles serán las coordenadas de P' ? Y si al punto P' le aplicas un giro de 180° , ¿qué coordenadas tendrá P'' ?
- 7.- Dado un triángulo ABC de vértices $A(2,5)$, $B(7,9)$ y $C(9,1)$:
a) Dibújalo en el plano cartesiano. b) Dibuja su simétrico respecto del eje de ordenadas y calcula las coordenadas de sus vértices. c) Dibuja su simétrico respecto del eje de las abscisas y calcula las coordenadas de sus vértices.
- 8.- ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado? ¿Y un rombo? ¿Y un rectángulo? ¿Y un trapecio isósceles?
- 9.- Dibuja en el plano cartesiano un triángulo ABC y halla su simétrico respecto al origen de coordenadas
- 10.- Un segmento tiene de extremos $A(-3,5)$ y $B(4,-1)$. Halla las coordenadas de los extremos del segmento simétrico respecto al punto $O(1,1)$
- 11.- ¿Tienen centro de simetría un triángulo equilátero, un cuadrado, un rombo, un pentágono regular y un hexágono regular?
- 12.- Traza en un pentágono regular, un hexágono regular y en un trapecio isósceles los ejes de simetría.

Soluciones de los ejercicios semejanzas:

- 1.- $(-4,5)$;
- 2.- $A' = (10, 6)$, $B' = (14,3)$;
- 3.- $P''' = (7,6)$;
- 4.- Respuesta libre;
- 5.- Respuesta libre
- 6.- $P' (0,5)$, $P'' (0,-5)$
- 8.- cuadrado 4, rombo 4, rectángulo 2, trapecio 1
- 9.- Respuesta libre;
- 10.- $A' = (5,-3)$ $B' = (-2,3)$;
- 11.- Solo el cuadrado y el rombo;
- 15.- a) $\overline{AB} = (-7, 4)$, $\overline{BC} = (4,0)$; b) $\overline{BA} = (7, -4)$, $\overline{CB} = (-4,0)$ opuestos
c) $IABI = IBAI = \sqrt{65}$, $IBCI = ICBI = 4$; d) $(-3,4)$; e) $(-11,4)$; f) $(-22,-16)$; g) $(-12,0)$

