

1. Experimentos aleatorios

Frente a un tipo de experimentos, cuya repetición produce idénticos resultados (experimentos deterministas), podemos considerar aquellos otros caracterizados por la imprevisibilidad de su desenlace, a pesar de que se ejecuten siempre en las mismas condiciones. Son los **experimentos aleatorios**, de cuya existencia bien pueden servir, como ejemplo, los juegos de azar: el lanzamiento de una moneda, de un dado o la extracción de una carta en una baraja, etc. En todos ellos el resultado es incierto, aun tomando las máximas precauciones para simular idénticamente las condiciones del juego.

➤ Espacio muestral

En toda experiencia aleatoria es conveniente conocer y enumerar el abanico de posibles manifestaciones de la misma. Cada una de ellas se llama **suceso elemental** y su conjunto constituye el **espacio muestral** del experimento, que suele representarse por la letra E .

Ejemplos

1. El espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cada uno de esos número es un suceso elemental.
2. El espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas (R), 2 blancas (B) y 4 verdes (V) es $E = \{R, B, V\}$.
3. Si se lanzan dos monedas y anotamos el resultado obtenido, el espacio muestral será $E = \{CC, CX, XC, XX\}$, donde C es el suceso “salir cara” y X es el suceso “salir cruz”.

Cuando dos o más experimentos simples se realizan a la vez, tenemos un experimento **compuesto**.

Ejemplos

4. Tirar un dado y una moneda a la vez.
5. Tirar dos monedas a la vez.



Ejercicio resuelto

Si en el ejemplo 2 el experimento consiste en extraer dos bolas de la bolsa, ¿cuál será en este caso el espacio muestral? ¿Y si extraigo primero una bola, apunto el resultado, la vuelvo a introducir, saco otra bola y apunto también este último resultado?

➤ Los sucesos

Todo subconjunto del espacio muestral constituye un **suceso** del experimento. Por tanto, un suceso está formado por uno o varios sucesos elementales.

- Los sucesos suelen denotarse con letras mayúsculas: A , B ,...
- Se dice que ha ocurrido un suceso cuando al realizar el experimento se obtiene alguno de los sucesos elementales que lo forman.

Ejemplos

6. Sucesos del experimento de lanzar dos monedas son: $A = \{\text{sacar una cara y una cruz}\} = \{CX, XC\}$;
 $B = \{\text{al menos una cruz}\} = \{CX, XC, XX\}$.

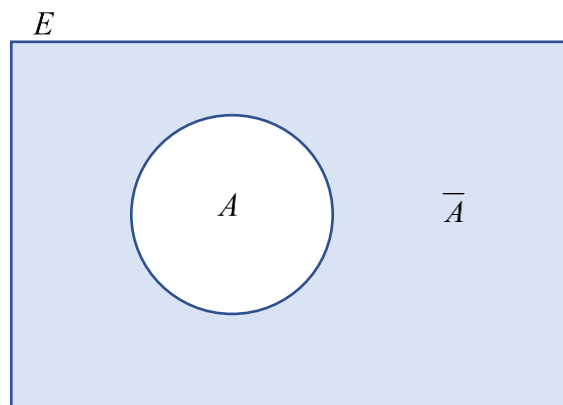
7. En el lanzamiento de dos dados podemos considerar los siguientes sucesos:

$$A = \{\text{suma de puntuaciones igual a } 7\} = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

$$B = \{\text{ambas puntuaciones menores que } 3\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

Subconjuntos de E que merecen una consideración especial son:

- El subconjunto vacío, $\emptyset$, que, al no poseer sucesos elementales (carece de elementos), se denomina **suceso imposible**.
- El conjunto E , que obviamente contiene todo suceso elemental y, por tanto, ocurrirá siempre, por lo que lo denominamos **suceso seguro**.
- El subconjunto complementario de A , formado por todos los sucesos elementales que no son de A , que genera el suceso **contrario o complementario** de A , denotado por $\bar{A}$. Gráficamente, si el suceso seguro E se representa por un rectángulo y A por un círculo, $\bar{A}$ será la región del rectángulo exterior al círculo (ver figura de la derecha).



Ejemplos

8. El suceso contrario de sacar al menos una cruz al tirar dos monedas es no sacar ninguna cruz, que es lo mismo que sacar dos caras: $\bar{A} = \{CC\}$.
9. El suceso contrario del suceso sacar *oros* al extraer una carta de la baraja, $A = \{\text{oros}\}$ es no sacar oros: $\bar{A} = \{\text{copas, espadas, bastos}\}$.

➤ Operaciones con sucesos

Las operaciones que pueden definirse con sucesos son tres: unión, intersección y diferencia.

✓ Unión de sucesos

La **unión** de dos sucesos A y B , que se denota por $A \cup B$, es el suceso que se cumple cuando lo hace A , B o ambos a la vez. Esto es, cuando se cumple al menos uno de los sucesos A o B (ver figura de la página siguiente).

Son evidentes las siguientes propiedades de la unión: $A \cup E = E$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup \bar{A} = E$.

✓ Intersección de sucesos

La **intersección** de dos sucesos A y B se denota por $A \cap B$ y es el suceso que se cumple cuando lo hacen ambos sucesos a la vez (ver figura de la página siguiente).

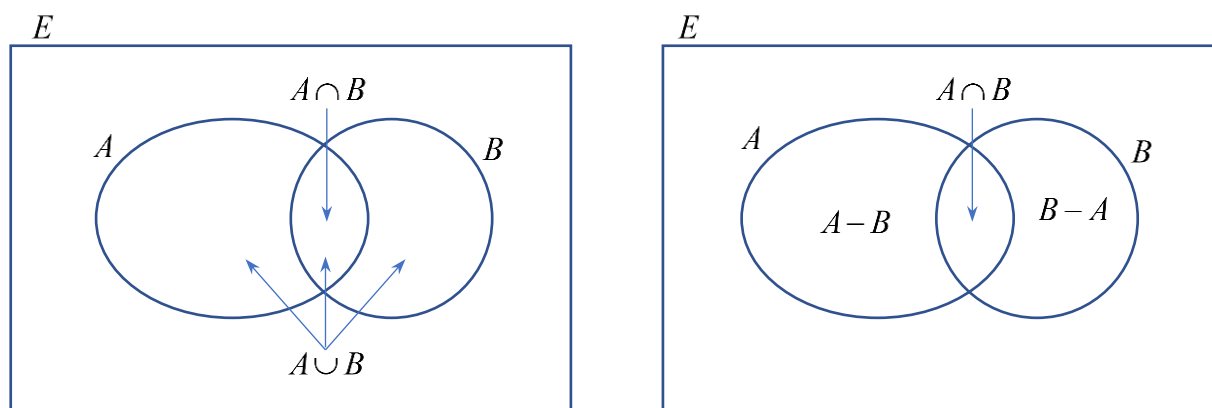
- Dos sucesos A y B son **incompatibles** cuando su intersección es el suceso imposible: $A \cap B = \emptyset$.

Pueden comprobarse fácilmente las siguientes propiedades de la intersección: $A \cap E = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

✓ Diferencia de sucesos

La diferencia de dos sucesos A y B , $A - B$, es el suceso que se presenta cuando lo hace A pero no B .

Con ayuda de la figura siguiente puedes comprobar las siguientes propiedades en las que interviene la diferencia de sucesos: $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$, $A - B = A \cap \bar{B}$



Ejemplo

10. En el experimento de lanzar un dado consideremos el suceso $A = \{\text{salir par}\} = \{2, 4, 6\}$ y el suceso $B = \{\text{salir múltiplo de 3}\} = \{3, 6\}$. Entonces:

- $A \cup B = \{\text{salir par o salir múltiplo de 3}\} = \{2, 3, 4, 6\}$.
- $A \cap B = \{\text{salir par y salir múltiplo de 3}\} = \{6\}$.
- $A - B = \{\text{salir par pero no salir múltiplo de 3}\} = \{2, 4\}$.

✓ Las leyes de Morgan y otras propiedades

Las leyes de Morgan dan la relación entre la unión e intersección de sucesos y sus complementarios. Son las siguientes: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Ejemplo:

11. Si H es el suceso “ser hombre” y C el suceso “estar casado o casada”, entonces $\overline{H \cup C}$ es el suceso complementario de “ser hombre o estar casado/a” que, según las leyes de Morgan coincide con el suceso “no ser hombre y no estar casado/a”, o lo que es lo mismo, con el suceso “ser mujer soltera”. Este resultado no es evidente, de ahí la importancia de esta ley, $\overline{H \cup C} = \bar{H} \cap \bar{C}$, pues el segundo miembro es más sencillo de interpretar que el primero. Veamos: $\bar{H}$ es el suceso “no ser hombre”, es decir, el suceso “ser mujer” y $\bar{C}$ es el suceso “estar soltero/a”. Por tanto, $\bar{H} \cap \bar{C}$ se corresponde con el suceso “ser mujer soltera”. Análogamente puedes ver que $\overline{H \cap C} = \bar{H} \cup \bar{C}$ es el suceso “ser soltero o ser mujer”.

Otras propiedades de las operaciones con sucesos son:

- **Conmutativas:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- **Asociativas:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- **Distributivas:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.



Ejercicio resuelto

1 Consideremos, entre los habitantes de un municipio, los sucesos A , “ser socio del casino”, B , “ser socio del club de fútbol local” y C , “ser socio de alguna asociación juvenil”.

a) Expresa en función de A , B y C las siguientes situaciones:

1. Ser socio de alguna de esas asociaciones.
2. Ser socio de las tres asociaciones.
3. Ser socio, sólo, del casino.
4. Ser socio de, como máximo, una o dos asociaciones.
5. No ser socio de ninguna de las tres.
6. Ser socio de una sola asociación.

b) Describe el significado de los siguientes sucesos:

1. $A \cup B \cup C$.
2. $\overline{A \cup B \cup C}$.
3. $A \cup B - C$.
4. $\overline{A \cap B \cap C}$.
5. $C - (A \cup B)$.
6. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Solución

Apartado a)

1. Alguna de las tres: $A \cup B \cup C$.
2. Ser socio de las tres: $A \cap B \cap C$.
3. Sólo del casino: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
4. De, como máximo, una o dos asociaciones: $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.
5. De ninguna de las tres: $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
6. De una sola asociación: $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

Apartado b)

1. Pertenecer, al menos, a una asociación.
2. No ser socio de ninguna.
3. No ser de ninguna asociación juvenil, pero sí de alguna de las otras dos.
4. No ser socio de las tres asociaciones.
5. Pertenecer sólo a la asociación juvenil.
6. Ser socio de, al menos, dos asociaciones.

2. Probabilidad

La probabilidad es la medida de la incertidumbre de un suceso aleatorio. La probabilidad es un número que indica las posibilidades que tiene de verificarse ese suceso al realizar el experimento aleatorio.

Estas ideas se sintetizan en la conocida **Regla de Laplace**, que asigna la probabilidad a cualquier suceso A , de acuerdo con el siguiente criterio:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables de que ocurra } A}{\text{Total de casos posibles}}$$

Esta ley sólo es aplicable cuando los sucesos elementales son (se suponen *a priori*), por razones de simetría u homogeneidad, **equiprobables** (de igual probabilidad).

Ejemplo

12. En el lanzamiento de dos dados, como sabes, el total de casos posibles son 36:

$$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Si los dados están correctamente contruidos, los sucesos elementales serían equiprobables; entonces:

- Si llamamos A al suceso “salir ambas caras números pares”, tendríamos que $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, pues los casos favorables de A son 9: $A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$.
- Si llamamos B al suceso “la suma de las caras es igual a 9”, entonces $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, ya que, en este caso, los casos favorables a B son 4: $B = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\}$.

➤ Definición axiomática

De una manera formal, la probabilidad puede definirse diciendo que: es una función P que asigna a cada suceso un número real, debiendo cumplirse las siguientes condiciones:

1. Ese número está entre 0 y 1. Esto es, para cualquier suceso A : $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. La probabilidad de E (el suceso seguro: espacio muestral) es 1: $P(E) = 1$.
3. Si A y B son sucesos incompatibles, es decir si $A \cap B = \emptyset$, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Las dos **consecuencias** más importantes de esta definición son las siguientes:

a) Para un suceso cualquiera A , se tiene:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Esto es fácil de demostrar, pues como $A \cup \bar{A} = E$, entonces tenemos por la condiciones 2 y 3: $P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$, y puesto que $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$, entonces $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

De alguna manera, esta propiedad viene a decir que “las probabilidades de dos sucesos contrarios también son contrarias”.

b) Para dos sucesos cualesquiera A , B , se tiene:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se resta $P(A \cap B)$ para evitar contar dos veces el suceso $A \cap B$, pues éste se da cuando se cumple A y cuando se cumple B (vuelve a mirar la figura de la página 92 para cerciorarte de esto).



Ejercicio resuelto

2 Las probabilidades de los sucesos A , B y $A \cap B$ son, respectivamente: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ y

$P(A \cap B) = \frac{1}{15}$. Con estos datos calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

- Que se cumpla alguno de los sucesos A o B .
- Que no se cumpla A y sí B .
- Que se cumpla uno solamente.
- Que no se cumpla ni A ni B .

Solución

a) Es el suceso $A \cup B$, luego:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

b) Es el suceso $B - A$. Como $B = (B - A) \cup (B \cap A)$, y $B - A$ y $B \cap A$ son incompatibles, entonces: $P(B) = P((B - A) \cup (B \cap A)) = P(B - A) \cup P(B \cap A)$ y de aquí se tiene $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

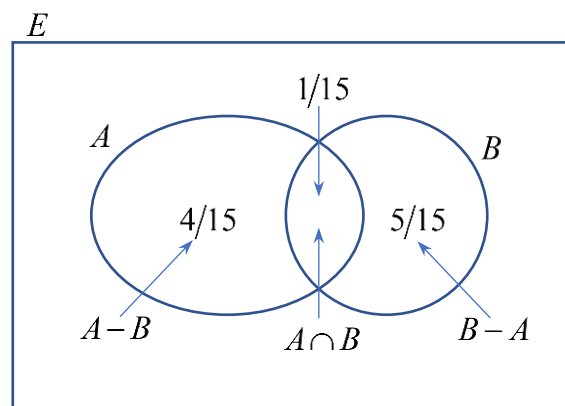
$$\text{Así pues, } P(B - A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

c) Es el suceso $(A - B) \cup (B - A)$, cuya probabilidad es

$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= P(A - B) + P(B - A) = \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{15}\right) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

d) Es el suceso $\overline{A \cup B}$, luego

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$



En la mayoría de los casos, la única forma que hay de determinar probabilidades es realizando una investigación previa mediante **muestreo**. En la unidad 8: Inferencia estadística, se estudiará con más detenimiento este proceso.

3. Experimentos compuestos. Diagramas de árbol

Ya vimos que cuando un experimento aleatorio consiste en la realización de dos o más experiencias simples, éste se llama experimento compuesto. Este tipo de experiencias son numerosas.

El espacio muestral del experimento compuesto se obtiene a partir de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen. Recibe el nombre de **espacio compuesto** o **espacio producto**.

El cálculo de probabilidades de los sucesos que ocurren en los experimentos compuestos se efectúa en función de las probabilidades de los sucesos elementales de las experiencias simples que forman el experimento aleatorio.

La probabilidad de un suceso elemental de un espacio compuesto puede calcularse multiplicando las probabilidades de los sucesos elementales que conforman la experiencia compuesta.

Los **diagramas de árbol** son una herramienta inmejorable en la descripción de los experimentos compuestos y en el cálculo de probabilidades asociadas a estas experiencias. Todo esto puede verse en las actividades desarrolladas que siguen.



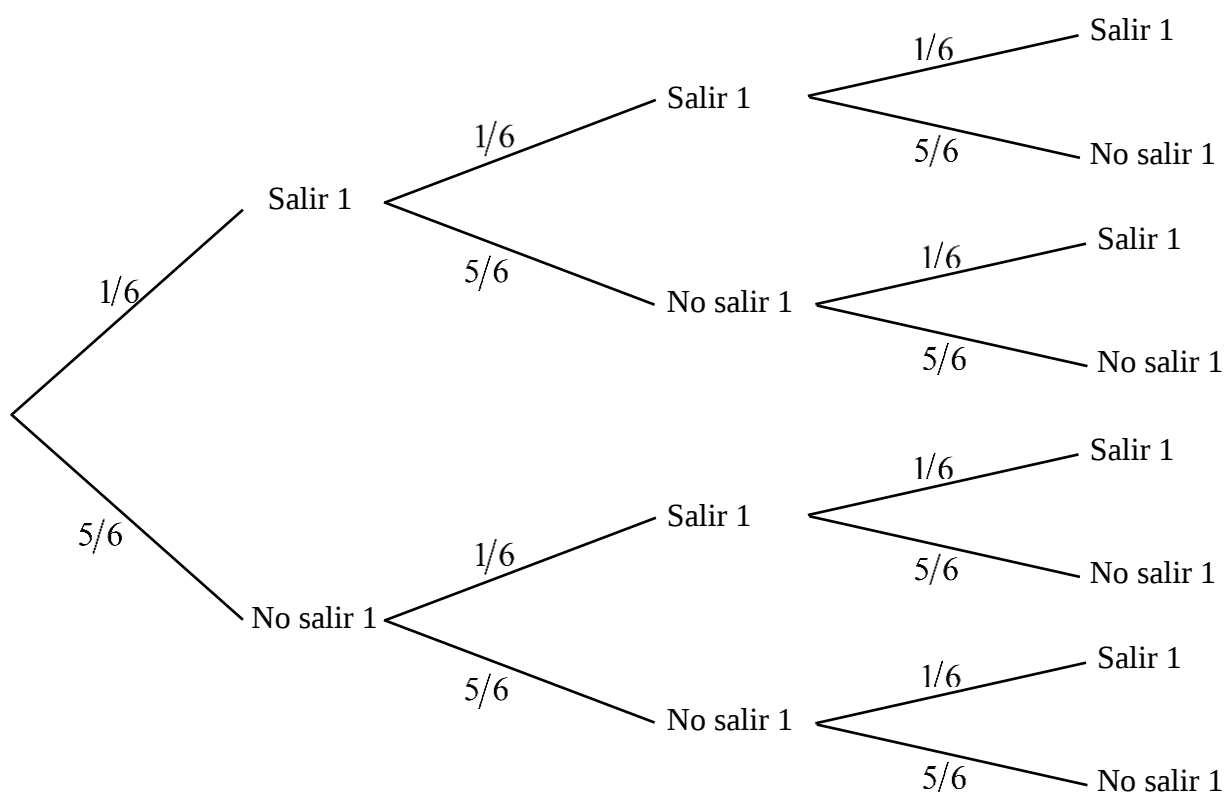
Ejercicios resueltos

3 Dos personas, A y B , organizan el siguiente juego: tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A . Si no sale ningún 1, gana B . ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidad de ganar?

Solución

Calculamos las probabilidades de ganar de cada una de las personas. Las probabilidades asociadas a cada una de las tiradas pueden verse en el diagrama de árbol adjunto.

La probabilidad de que no salga el número 1 al tirar un dado es $5/6$, y la probabilidad de que no salga ningún 1 al tirar el dado tres veces es $5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = (5/6)^3$. En un diagrama se ven todas las posibilidades.



De esta forma tenemos que:

La probabilidad de que gane B es $P(\text{no salir ningún 1}) = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = (5/6)^3 = 0,5787$.

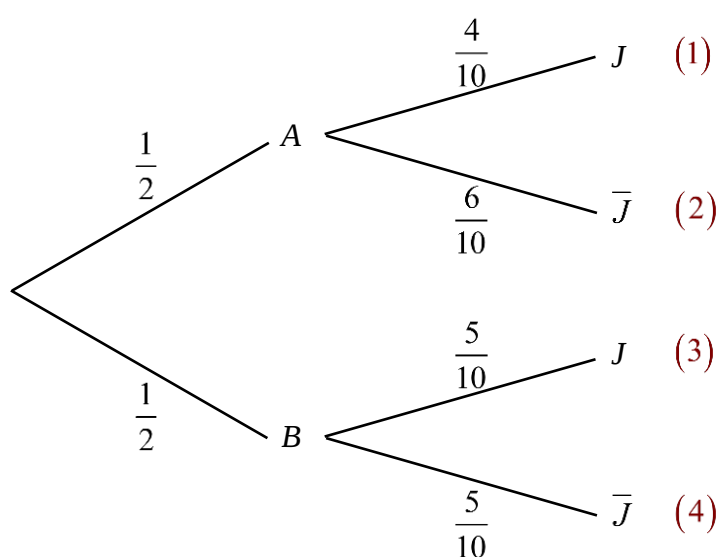
La probabilidad de que gane A es $P(\text{salir algún 1}) = 1 - P(\text{no salir ningún 1}) = 1 - 0,5787 = 0,4213$.

Se observa que tiene más probabilidades de ganar el jugador B .

4 Una casa tiene dos escaleras. La escalera A tiene 10 pisos, en cuatro de ellos hay joyas; en la escalera B , cinco pisos tienen joyas y cinco no. Un ladrón entra al azar en una de las escaleras y luego en uno de los pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre en un piso con joyas?

Solución

Llamemos A al suceso “elegir la escalera A ”, y B al suceso “elegir la escalera B ”. Sea también el suceso J “el piso tiene joyas”.



Un diagrama de árbol que representa esta situación es el siguiente:

Teniendo en cuenta el diagrama de árbol con las probabilidades que aparecen en sus ramas, se obtiene la probabilidad de que el ladrón entre en un piso con joyas es la siguiente:

$$P(J) = P(J \cap A) + P(J \cap B) = (1) + (3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{9}{20} = 0,45$$

4. Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso A puede verse alterada si la información de que disponemos se incrementa, reduciendo, de este modo, la incertidumbre inherente al experimento aleatorio. Este incremento de información se traduce en una disminución de los casos posibles, aumentando, por tanto, la probabilidad de A .

Por ejemplo, en el experimento de lanzar tres monedas, si A es el suceso “sacar dos caras”, su probabilidad es $P(A) = 3/8$ (¡piénsalo!). Pero si nos informasen de que, en esa tirada, ha salido al menos una cruz, los casos posibles se reducen siete (todos menos el suceso CCC). Por tanto, ahora, la probabilidad del suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B , “hay, como mínimo, una cruz” (que llamaremos **suceso A condicionado por B** y se escribe A/B), sería: $P(A/B) = 3/7$.

Observa que 3 son los casos comunes al suceso A y al suceso B , esto es, favorables a $A \cap B$, siendo $P(A \cap B) = 3/8$. Por otra parte, $P(B) = 7/8$. Y como la probabilidad del suceso A/B es el cociente entre casos favorables y caso posibles se tiene que:

$$P(A/B) = \frac{3}{7} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esto sugiere definir la **probabilidad condicionada** de un suceso A por otro B , como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Del mismo modo,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo

13. Supongamos que en un Instituto de Secundaria hay 500 alumnos de Bachillerato, y que se distribuyen, por cursos y modalidades, según se muestra en la siguiente tabla:

	Curso 1º	Curso 2º	Total
Tecnológico	80	60	140
Ciencias Sociales	100	90	190
Ciencias Naturales	85	85	170
Total	265	235	500

Si designamos por T , S , N los sucesos consistentes en cursar Bachillerato Tecnológico, de Ciencias Sociales o de Ciencias Naturales, respectivamente, y por I y II ser de primero o segundo curso, se tiene que $P(T) = 140/500$, $P(S) = 190/500$ y $P(N) = 170/500$.

Y las mismas probabilidades, pero condicionadas por ser de primer curso serán $P(T/I) = 80/265$, $P(S/I) = 100/265$ y $P(N/I) = 85/265$.

Observa que, en todos los casos, se cumple la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(T/I) = \frac{P(T \cap I)}{P(I)} = \frac{P(\text{alumno de } I \text{ y de } T)}{P(\text{alumno de } I)} = \frac{80/500}{265/500} = \frac{80}{265}$$

$$P(S/I) = \frac{P(S \cap I)}{P(I)} = \frac{P(\text{alumno de } I \text{ y de } S)}{P(\text{alumno de } I)} = \frac{100/500}{265/500} = \frac{100}{265}$$

$$P(N/I) = \frac{P(N \cap I)}{P(I)} = \frac{P(\text{alumno de } I \text{ y de } N)}{P(\text{alumno de } I)} = \frac{85/500}{265/500} = \frac{85}{265}$$

Análogamente puedes comprobar, por ejemplo, que $P(T/II) = 60/235$, $P(II/T) = 60/140$, etcétera.

➤ Probabilidad de la intersección de sucesos

La fórmula de la probabilidad condicionada permite determinar una expresión sencilla para hallar

$P(A \cap B)$ pues de la fórmula $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ se deduce, despejando, que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Para la intersección de tres sucesos, se tendría:

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C/A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$$

Por tanto:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$$

Esta expresión se generaliza para la intersección de cualquier número de sucesos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$



Ejercicio resuelto

5 Un opositor se sabe 35 temas de los 50 de que consta el temario. La prueba consiste en responder a tres temas elegidos al azar. Calcula qué probabilidad tiene de superar la oposición si para ello hay que contestar a los tres temas.

Solución

Supongamos que en la oposición salen, una vez realizado el sorteo, los temas A , B y C . Para aprobar hay que saber los tres temas: suceso $A \cap B \cap C$.

De saberse A tiene 35 opciones entre 50:

$$P(A) = \frac{35}{50}$$

Si ya ha contestado a A , de saberse B tiene 34 opciones entre los 49 temas que restan:

$$P(B/A) = \frac{34}{49}$$

Si ya ha contestado a A y a B , de saberse C tiene 33 opciones entre los 48 temas que restan:

$$P(C/A \cap B) = \frac{33}{48}$$

Entonces, la probabilidad de $A \cap B \cap C$ es:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B) = \frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} \cdot \frac{33}{48} \cong 0,334$$

5. Independencia de sucesos

Se ha visto que la finalidad de la probabilidad condicionada es recoger la influencia que puede ejercer un suceso sobre otro. Si esta influencia no existiera, se habla de **independencia** de los sucesos. En consecuencia, se dice que **un suceso A es independiente de otro B** si $P(A/B) = P(A)$, es decir, la presencia de B no influye en la probabilidad de que A ocurra o no.

De acuerdo con la definición de probabilidad condicionada, la igualdad anterior se puede escribir:

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, y entonces, despejando $P(A \cap B)$ de esta última igualdad, tenemos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Además, si A es independiente de B , la probabilidad condicionada del suceso B/A es:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

con lo que $P(B/A) = P(B)$, lo que significa que B es independiente de A .

En consecuencia, la independencia de dos sucesos exige reciprocidad entre ambos.

Podemos, por tanto, concluir diciendo que, si los sucesos A y B son independientes, hay equivalencia entre las siguientes igualdades:

$$P(A/B) = P(A) ; P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) ; P(B/A) = P(B)$$

Teorema.

La independencia se conserva con la operación de complementariedad. Es decir, si A y B son dos sucesos independientes, entonces se cumple que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

Demostración:

Partiendo de que A y B son sucesos independientes, se trata de comprobar que los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ también lo son. Esto es, de la igualdad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ hay que concluir que

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = 1 - P(A) - P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(\bar{A}) - P(B) \cdot P(\bar{A}) = \\ &= P(\bar{A}) \cdot (1 - P(B)) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \end{aligned}$$

¡Intenta justificar el porqué de cada uno de los pasos que se han dado en la demostración!

La independencia de tres o más sucesos se caracteriza como sigue:

- Si los sucesos A , B y C son independientes entonces $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Sin embargo, no es cierto el recíproco, como ocurría para dos sucesos. Esto es, de la igualdad $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ no se concluye que A , B y C sean independientes. Para que lo sean hay que ver que son independientes **dos a dos**, esto es, que:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

- En general, si los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son independientes, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Como antes, esa igualdad no basta para asegurar la independencia de los $n-1$ sucesos; hay que compararlos dos a dos, tres a tres, ..., n a n .



Ejercicio de aplicación

6 Un tirador tiene una probabilidad de 0,8 de dar en el blanco. Si realiza tres disparos, calcula la probabilidad de haber hecho diana:

- a) Con algún disparo.
- b) Con dos disparos.

Solución

Llamemos A , B , C a los sucesos “haber hecho blanco en los disparos 1º, 2º ó 3º”, respectivamente. Estos sucesos son independientes (el hecho de hacer blanco en un disparo no debe influir para nada en el hecho de hacer blanco, o no, en cualquier otro). También serán independientes sus complementarios (no dar en el blanco): $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$.

- a) Calculemos la probabilidad de que se hayan fallado los tres disparos, es decir, del suceso $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = (1-0,8) \cdot (1-0,8) \cdot (1-0,8) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008.$$

“Haber hecho diana en algún disparo” es el suceso contrario de haber fallado los tres, por lo que:

$$P(\text{"acertar en algún disparo"}) = 1 - 0,008 = 0,992.$$

- b) Haber hecho diana con dos disparos es el suceso $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$ cuya probabilidad será:

$$\begin{aligned} P[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)] &= \\ &= P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128 + 0,128 + 0,128 = 0,384. \end{aligned}$$

6. Probabilidad total. Teorema de Bayes

Con frecuencia, cuando se contempla la ocurrencia de un suceso se han de analizar diversos escenarios en los que haya podido ocurrir, no siendo uno solo el responsable de su acaecimiento. Por ejemplo, un accidente de automóvil puede ocurrir como consecuencia de conducir ebrio, de que ha llovido, de que hay niebla, etc.; y también no ocurrir, aun dándose algunas de esas circunstancias.

En general, un suceso B de un espacio muestral E , puede depender de otros n sucesos A_i , $i=1, 2, \dots, n$ incompatibles entre sí y tales que su unión sea el espacio muestral E . Esto es, de n sucesos que cumplan que $A_i \cap A_j = \emptyset$ y $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$.

Entonces, como $B = B \cap E$, se tiene que

$$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

y como los sucesos $B \cap A_i$, $i=1, 2, \dots, n$, son también incompatibles entre sí, se puede escribir:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

Teniendo en cuenta que $P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B / A_i)$, se concluye que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$$

Igualdad que nos presenta la probabilidad del suceso B , recogiendo, a través de los A_i , todas las posibles circunstancias que se pudieran presentar condicionando al suceso. Tal igualdad se conoce con el nombre de **probabilidad total** del suceso.



Ejercicio resuelto

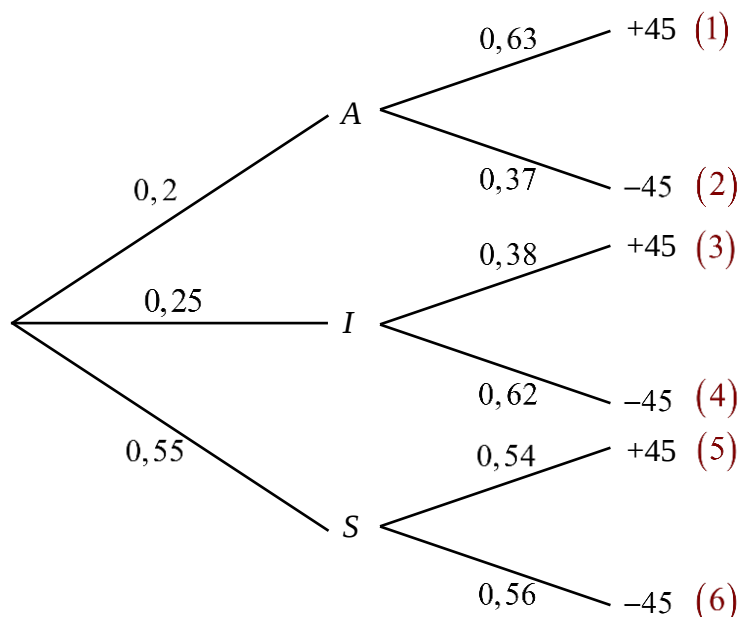
7 En cierta población, un 20% de los trabajadores lo hace en la agricultura (A), un 25% en la industria (I) y el resto en el sector servicios (S). Un 63% de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38% y el 44% en los otros sectores. Seleccionando un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?

Solución

Las probabilidades de A , I y S son: $P(A) = 0,2$; $P(I) = 0,25$; $P(S) = 0,55$. Llamemos +45 y -45 a los sucesos “tener más o menos de 45 años”, respectivamente. Como los porcentajes de trabajadores menores de 45 años en la agricultura (-45/ A), industria (45/ I) y servicios (-45/ S), son el 37%, 62% y 56%, se tiene que: $P(-45 / A) = 0,37$; $P(-45 / I) = 0,62$ y $P(-45 / S) = 0,56$. Con esto, la probabilidad de que la persona elegida tenga menos de 45 años es:

$$\begin{aligned} P(-45) &= P(-45 \cap A) + P(-45 \cap I) + P(-45 \cap S) = \\ &= P(A) \cdot P(-45 / A) + P(I) \cdot P(-45 / I) + P(S) \cdot P(-45 / S) = \\ &= 0,2 \cdot 0,37 + 0,25 \cdot 0,62 + 0,55 \cdot 0,56 = 0,074 + 0,155 + 0,308 = 0,537. \end{aligned}$$

Obsérvese que nos hemos limitado a aplicar, directamente, la fórmula de la probabilidad total vista anteriormente. Pero también es válido resolver este problema acudiendo a un diagrama de árbol. Veámoslo:



$$P(-45) = (2) + (4) + (6) = 0,2 \cdot 0,37 + 0,25 \cdot 0,62 + 0,55 \cdot 0,56 = 0,074 + 0,155 + 0,308 = 0,537.$$

➤ Teorema de Bayes

El cálculo de la probabilidad total de un suceso hace fijar la atención en los diversos medios que se manifiestan influyendo en él. Pero podemos invertir nuestro interés y, ante la presencia del suceso, investigar por la probabilidad de que se haya desarrollado en uno u otro escenario.

Se trata, suponiendo los sucesos A_i , $i=1, 2, \dots, n$ formando un sistema completo de sucesos y B el suceso que se realiza, de hallar las probabilidades $P(A_i / B)$, $i=1, 2, \dots, n$.

Tal probabilidad se puede calcular teniendo en cuenta que, por la fórmula de la probabilidad condicionada, se cumple que $P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$. Pero, además, es que $P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B / A_i)$. Entonces:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(B)}$$



Ejercicio resuelto

8 En las condiciones del ejemplo anterior, si sabemos que un trabajador es menor de 45 años podemos preguntarnos: ¿qué probabilidad hay de que proceda de cada uno de los sectores agrícola, industrial y servicios? Es decir, hallar $P(A / -45)$, $P(I / -45)$ y $P(S / -45)$.

Solución

Anteriormente hemos calculado que $P(-45) = 0,537$, por tanto:

- $P(A / -45) = \frac{P(A) \cdot P(-45 / A)}{P(-45)} = \frac{0,2 \cdot 0,37}{0,537} = 0,14.$
- $P(I / -45) = \frac{P(I) \cdot P(-45 / I)}{P(-45)} = \frac{0,25 \cdot 0,62}{0,537} = 0,29.$

$$\bullet \quad P(S / -45) = \frac{P(S) \cdot P(-45 / S)}{P(-45)} = \frac{0,55 \cdot 0,56}{0,537} = 0,57.$$

Como $P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$, sustituyendo en la última expresión se tendrá:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de **fórmula de Bayes** y pone de manifiesto la relación entre las probabilidades $P(A_i)$, llamadas **a priori** por formularse antes de la presencia del suceso B , y las probabilidades $P(A_i / B)$, obtenidas **a posteriori**, pues su cálculo se realiza después de contar con una información adicional suministrada por aquel suceso.



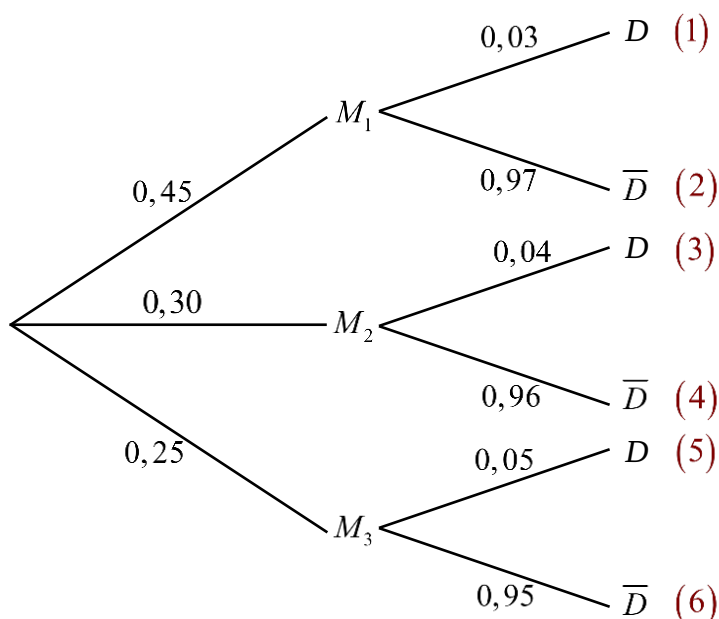
Ejercicio resuelto

9 Tres máquinas, M_1 , M_2 y M_3 , producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

- Seleccionamos una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
- Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa. Calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina M_2 .
- ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Solución

Sea D el suceso “la pieza es defectuosa” y $\bar{D}$ el suceso “la pieza no es defectuosa”. La información del problema puede expresarse en el siguiente diagrama de árbol.



a) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, $P(D)$, por la probabilidad total:

$$\begin{aligned}P(D) &= P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D) = \\&= P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2) + P(M_3) \cdot P(D/M_3) = \\&= 0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,0135 + 0,012 + 0,0125 = 0,038.\end{aligned}$$

Usando el diagrama de árbol, lo haríamos así:

$$P(D) = (1) + (3) + (5) = 0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,0135 + 0,012 + 0,0125 = 0,038.$$

b) Debemos calcular $P(M_2/D)$. Por el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned}P(M_2/D) &= \frac{P(M_2) \cdot P(D/M_2)}{P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2) + P(M_3) \cdot P(D/M_3)} = \\&= \frac{0,30 \cdot 0,04}{0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05} = \frac{0,012}{0,038} = 0,3158.\end{aligned}$$

Usando el diagrama de árbol:

$$P(M_2/D) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{(3)}{P(D)} = \frac{0,30 \cdot 0,04}{0,038} = \frac{0,012}{0,038} = 0,3158.$$

c) Calculamos $P(M_1/D)$ y $P(M_3/D)$ y las comparamos con el valor de $P(M_2/D)$ ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(M_1/D) = \frac{0,45 \cdot 0,03}{0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05} = \frac{0,0135}{0,038} = 0,3553.$$

$$P(M_3/D) = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05} = \frac{0,0125}{0,038} = 0,3289.$$

Usando el diagrama de árbol:

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{(1)}{P(D)} = \frac{0,45 \cdot 0,03}{0,038} = \frac{0,0135}{0,038} = 0,3553.$$

$$P(M_3/D) = \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{(5)}{P(D)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,038} = \frac{0,0125}{0,038} = 0,3289.$$

De lo anterior se deduce que la máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es M_1 .



Ejercicios

1. El 70% de empresas tiene errores en sus activos financieros, el 60% tiene errores en sus pasivos financieros y el 40% tiene errores en sus activos y en sus pasivos financieros. Obtén razonadamente el porcentaje de empresas sin errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos. De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros?

Solución: 30%; 40%; 10%; 50 empresas sin errores ni en activos ni en pasivos.

2. Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penaltis se consideran los siguientes sucesos: $A = \{\text{mete sólo uno de ellos}\}$, $B = \{\text{mete dos de los tres}\}$ y $C = \{\text{mete el primero}\}$. Halla la probabilidad de los sucesos $A \cup B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

Solución: 60/125; 4/125; 32/125.

3. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:

- a) Seleccionar 3 niños.
- b) Seleccionar 2 niños y una niña.
- c) Seleccionar, al menos, un niño.

Solución: a) 3/14; b) 27/56; c) 27/28.

4. Si los sucesos A y B son independientes y compatibles, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a) $P(A \cap B) = P(B)$.
- b) $P(B \cup A) = P(A) + P(B)$.
- c) $P(\bar{A} / B) = P(\bar{A})$.

Solución: a) No es cierta, salvo que $P(A) = 1$; b) No es cierta; c) Sí es cierta.

5. Dos niños escriben en un papel una vocal cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma?

Solución: 1/5.

6. Se ha comprobado que el 48% de los alumnos de Bachillerato de cierta región son aficionados a la música clásica y a la pintura, y que el 60% de los aficionados a la pintura también son aficionados a la música clásica. Si se elige al azar un alumno de Bachillerato de esa región, ¿qué probabilidad hay de que no sea aficionado a la pintura?

Solución: 0,2.

7. En una clase hay 12 alumnos y 16 alumnas. El profesor saca a 4 a la pizarra.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean alumnas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean alumnos?

Solución: a) 0,089; b) 0,024.

8. En una muestra de 1000 personas hay 300 que saben inglés, 100 que saben ruso y 50 ambos idiomas. Con estos datos averigua si son independientes o no los sucesos “saber inglés” y “saber ruso”.

Solución: No son independientes.

9. La probabilidad de que un niño, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria es $1/6$, y en el caso de una niña es $1/10$. Si se toman al azar un niño y una niña, calcula las probabilidades siguientes:

- a) Que los dos estudien una carrera universitaria.
- b) Que ninguno de ellos estudie una carrera universitaria.
- c) Que al menos uno de ellos estudie una carrera universitaria

Solución: a) $1/60$; b) $45/60$; c) $15/60$.

10. Juan y Pedro lanzan una pelota a un blanco. La probabilidad de que Juan dé en el blanco es $1/3$ y la probabilidad de que dé Pedro es $1/4$. Supóngase que Juan lanza primero y que los dos chicos se van turnando para lanzar:

- a) Calcula la probabilidad de que el primer lanzamiento que dé en el blanco sea el segundo de Juan.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan dé en el blanco antes de que lo haga Pedro?

Solución: a) $1/6$; b) $2/3$.

11. Estudiando un determinado colectivo de personas resulta que: 2 de cada 5 son morenas, y 3 de cada 9 tienen los ojos azules, teniendo el resto los ojos de distinto color al azul. Calcula las siguientes probabilidades:

- a) Que una persona sea morena y tenga los ojos azules.
- b) Que una persona sea morena o no tenga los ojos azules
- c) Que tres personas sean morenas.
- d) Que dos personas sean morenas o tengan los ojos azules.

Solución: a) $2/15$; b) $4/5$; c) $8/125$; d) $19/75$.

12. En una clase, un 40% de alumnos aprobaron filosofía, y un 50% matemáticas. Se sabe que la probabilidad de aprobar filosofía si se ha aprobado matemáticas es 0,6.

- a) ¿Qué porcentaje de alumnos aprobaron ambas asignaturas?
- b) De los alumnos que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Solución: a) 30%; b) 75%.

13. Para la señalización de emergencia de un hospital se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador A se accione durante la avería es de 0,99, mientras que para el indicador B, la probabilidad es de 0,95.

- a) Calcula la probabilidad de que durante una avería se accione un solo indicador.
- b) Calcula la probabilidad de que durante una avería no se accione ninguno de los dos indicadores.

Solución: a) 0,059; b) 0,0005.

14. En 1994, en España, el 51,6% de la población en edad laboral (16 – 65 años) son mujeres y el 48,4% son hombres. De ellos, están en el paro el 31,4% de las mujeres y el 19,8% de los hombres. Elegida al azar una persona en edad laboral, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el paro?

Solución: 0,258

15. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Se pide:

- a) Probabilidad de que la segunda bola sea verde.
- b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

Solución: a) 0,582; b) 0,418.

16. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, $\frac{2}{5}$ son para el profesor A y $\frac{3}{5}$ son para el profesor B. Sus ocupaciones docentes les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50% del tiempo y B el 25%. Calcula la probabilidad de estar presente un profesor cuando le llamen.

Solución: 0,65.

17. Una bolsa contiene 3 monedas, una de las cuales está acuñada con 2 caras, mientras que las otras dos son normales. Se escoge una moneda al azar y se lanza sucesivamente 4 veces, obteniéndose 4 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la de 2 caras? Razona la respuesta.

Solución: $\frac{8}{9}$.

18. El despertador de Javier no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, Javier llega tarde a clase con probabilidad 0,2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9.

- a) Determina la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador.
- b) Determina la probabilidad de que llegue temprano.
- c) Javier ha llegado tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Solución: a) 0,16; b) 0,66; c) 0,47.

19. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, ciencias y letras, acaban la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30% ciencias y el 50% letras. Tomado un estudiante cualquiera al azar, se pide.

- a) Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.
- b) Si se tiene la carrera terminada, ¿cuál es la probabilidad de que sea de ingeniería?

Solución: a) 0,01; b) 0,071.

20. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A, B y C. El número total de unidades producidas de cada uno de ellos es el mismo (un tercio del total). Salen defectuosos, sin embargo, un 15 por mil de todos los del tipo A, un 3 por mil de todos los del tipo B y un 7 por mil de todos los del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70% de todos los bolígrafos defectuosos del tipo A, el 80% de los del tipo B y el 90% de los del tipo C. Los bolígrafos defectuosos en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcula la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución: 0,547.

21. El 35% de los créditos de un banco son para vivienda, el 50% son para industria y el 15% para consumo diverso. Resultan fallidos el 20% de los créditos para vivienda, el 15% de los créditos para industrias y el 70% de los créditos para consumo. Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.

Solución: 0,75.

22. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona una bola al azar, se descarta y se colocan 2 bolas de otro color en la urna. Luego se saca de la urna una segunda bola. Determina la probabilidad de que:

- a) La segunda bola sea roja.
- b) Ambas bolas sean del mismo color.
- c) La primera sea roja si la segunda lo es.

Solución: a) $41/72$; b) $13/36$; c) $20/41$.

23. De los créditos concedidos por un banco, un 42% lo son para clientes nacionales, un 33% para clientes de la Unión Europea y un 25% para individuos del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30%, un 24% y un 14% según sean nacionales, de la UE o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?

Solución: 0,7598.

24. En cierta empresa se producen dos bienes A y B en la proporción 3 a 4. La probabilidad de que un bien de tipo A tenga defecto de fabricación es del 3%, y del tipo B, del 5%. Se analiza un bien, elegido al azar, y resulta correcto, ¿qué probabilidad existe de que sea del tipo A?

Solución: 0,4337.

25. Tenemos tres urnas: U_1 con 3 bolas rojas y 5 negras, U_2 con 2 bolas rojas y 1 negra y U_3 con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1 ?

Solución: 0,26.

26. Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se introduce en la urna una bola blanca y, si sale cruz, se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y, a continuación, se introduce la mano en la urna, retirando una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna queden una bola blanca y otra negra?

Solución: $1/2$.

27. En segundo de Bachillerato de cierto instituto hay un total de 100 estudiantes, de los cuales 40 son hombres, 30 usan gafas y 15 son hombres y usan gafas. Si seleccionamos al azar un estudiante de dicho curso:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?
- b) Si sabemos que el estudiante seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

Solución: a) 0,45; b) 0,357.

28. Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción: A, B y C. La cadena A fabrica el 50% del total de coches producidos, la B el 25% y la C el resto. Si la probabilidad de que un coche resulte defectuoso es de $\frac{1}{2}$ en la cadena A, de $\frac{1}{4}$ en la cadena B y de $\frac{1}{6}$ en la cadena C, calcula:

- a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A.
- b) La probabilidad de que un coche haya sido producido por la cadena C si éste no es defectuoso.

Solución: a) $1/4$; b) $10/31 \cong 0,32$.

29. Elvira se sabe 18 unidades de las 22 de que consta el libro de Geografía. En un examen, por medio de bolas, se eligen dos unidades al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sepa las dos?

Solución: 0,662.

30. En una urna hay tres bolas azules y cuatro verdes. Si se extraen simultáneamente dos bolas al azar, halla la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color.

Solución: 0,42857.

31. Un cajón contiene cuatro calcetines negros, seis marrones y dos azules. Si se toman dos calcetines al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean negros? ¿Y la de que ambos sean del mismo color?

Solución: 0,091; 0,333.

32. La probabilidad de que un ciclista gane una carrera en día lluvioso es 0,08 y la de que gane una carrera en día seco es 0,3. Si la probabilidad de que el día de la carrera sea lluvioso es 0,25, ¿cuál será la probabilidad de que el ciclista gane la carrera?

Solución: 0,245.

33. Una librería tiene tres estantes con la siguiente composición: en el estante superior hay 3 novelas y 7 cuentos, en el estante central hay 8 novelas y 6 cuentos y en el inferior hay 5 novelas y 9 cuentos. Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si el libro ha resultado ser novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

Solución: 0,465.

34. En una ciudad el 35% de los censados vota al partido A, el 45% al partido B y el 20% restante se abstiene. Se sabe, además, que el 20% de los votantes del partido A, el 30% de los votantes del partido B y el 15% de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se pide:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano censado, elegido al azar, sea mayor de 60 años?
- b) Si dicho ciudadano es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Solución: a) 0,235; b) 0,1277.

35. Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras, una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:

- a) Las dos bolas sean blancas.
- b) Las dos bolas sean del mismo color.
- c) Las dos bolas sean de distinto color.

Solución: a) 0,40476; b) 0,4952; c) 0,5048.

36. Un trabajador tiene que coger un determinado autobús para ir a su trabajo. Lo coge en el 80% de los casos y en esa situación la probabilidad de llegar puntual al trabajo es 0,9. Si no lo coge, llega tarde el 50% de las veces. Calcula:

- a) Si llega puntual, ¿cuál es la probabilidad de que haya cogido el autobús?
- b) Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que haya perdido el autobús?

Solución: a) 0,878; b) 0,556.

37. Extraemos una carta de una baraja española; si sale figura, extraemos una bola de la urna I; en caso contrario, la extraemos de la urna II. Las urnas tienen la siguiente composición: urna I: 4 bolas blancas y 8 bolas verdes; urna II: 6 bolas verdes y 5 bolas rojas. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) La bola es verde y de la urna II.

b) La bola es blanca.

Solución: **a)** 0,385; **b)** 0,099.

38. La probabilidad de que una persona adquiera en una librería un periódico es de 0,4. La probabilidad de que adquiera una revista es de 0,3. La probabilidad de que adquiera ambas publicaciones es de 0,2. Calcula las probabilidades de los siguientes casos:

a) Que adquiera alguna publicación.

b) Que no adquiera ninguna.

c) Que adquiera sólo un periódico.

Solución: **a)** 0,5; **b)** 0,5; **c)** 0,2.

39. Se lanzan 5 dados sobre una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan sólo números pares? ¿Y de salga al menos un seis?

Solución: 0,03125; 0,5981.

40. De una baraja de 40 cartas se extraen tres naipes consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener la secuencia sota, caballo, rey.

Solución: 0,001077.