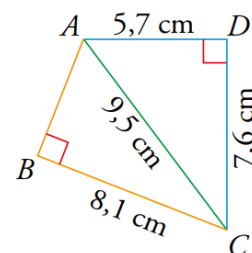


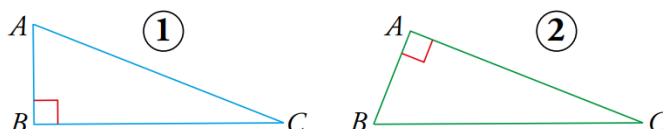
1. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($A = 90^\circ$):

a) $b = 56$ cm, $a = 62,3$ cm ; b) $b = 33,6$ cm, $c = 4,5$ cm ; c) $c = 16$ cm, $a = 36$ cm.

2. En la figura de la derecha hay dos triángulos rectángulos: ABC ($B = 90^\circ$); ACD ($D = 90^\circ$). Halla las razones trigonométricas de los ángulos ACD y BAC en el triángulo correspondiente.

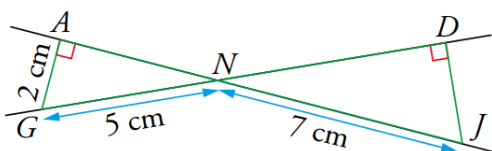


3. Indica qué razón o razones trigonométricas representan estos cocientes en el triángulo ① o en el ②:

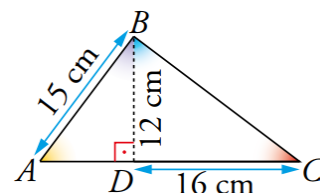


a) $\frac{AC}{AB}$; b) $\frac{CB}{AC}$; c) $\frac{AC}{CB}$; d) $\frac{AB}{AC}$

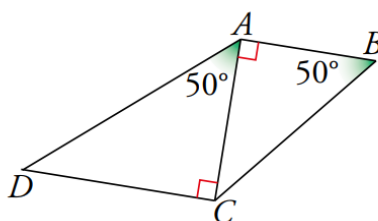
4. Observa la figura de más abajo y justifica por qué son iguales los ángulos ANG y DNJ . Halla las razones trigonométricas de ANG y la longitud de ND y DJ .



5. En la figura de la derecha, calcula BC y AD y comprueba que el triángulo ABC es rectángulo. Halla las razones trigonométricas del ángulo A en el triángulo ABC y en el triángulo ABD y comprueba que coinciden.



6. Si en la figura adjunta $AB = 10$ cm, ¿cuánto mide AD ?



7. Completa la siguiente tabla, siendo $\alpha < 90^\circ$. Da valores exactos, racionalizados y simplificados.

$\text{sen } \alpha$	$2/3$		
$\text{cos } \alpha$		$\sqrt{2}/3$	
$\text{tg } \alpha$			2

8. Calcula, en cada caso, las razones trigonométricas que faltan ($\alpha < 90^\circ$), sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora. Da valores exactos, racionalizados y simplificados.

a) $\text{sen } \alpha = 0,28$; b) $\text{cos } \alpha = 2/3$; c) $\text{tg } \alpha = \sqrt{5}$

9. Calcula el valor de las siguientes expresiones sin utilizar la calculadora. Da valores exactos, racionalizados y simplificados.

a) $\text{sen } 45^\circ - \text{cos } 45^\circ$; b) $\text{sen } 30^\circ + \text{cos } 60^\circ$; c) $\text{sen } 30^\circ + \text{cos } 30^\circ$;

d) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$; e) $\operatorname{tg} 45^\circ - \cos 60^\circ$; f) $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ$

10. Completa con la calculadora:

α	15°	$55^\circ 20'$	$72^\circ 25' 40''$	$85,5^\circ$
$\operatorname{sen} \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				

11. Halla el ángulo $\alpha < 90^\circ$ en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,58$; b) $\cos \alpha = 0,75$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$; d) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; e) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; f) $\operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{2}$

12. Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo ($\alpha < 90^\circ$) en cada uno de los casos siguientes:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,23$; b) $\cos \alpha = 0,74$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,75$; d) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; e) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; f) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($C = 90^\circ$) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

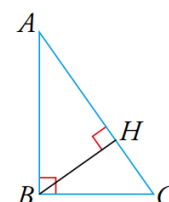
a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$. Hallar c , A , B .

b) $a = 43 \text{ m}$, $A = 37^\circ$. Hallar b , c , B .

c) $c = 5,8 \text{ km}$, $A = 71^\circ$. Hallar a , b , B .

14. Cuando los rayos de sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

15. Observa la figura de la derecha: ¿qué ángulo y en qué triángulo tiene por cateto contiguo AB ? ¿Y por cateto opuesto BH ? Si $\overline{HC} = 5,4 \text{ cm}$ y $C = 40^\circ$, halla $\overline{BH}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AH}$.



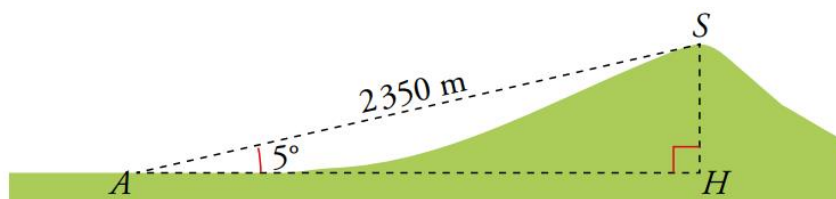
16. Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50° . ¿Cuánto mide el árbol?

17. Una cometa está sujeta al suelo mediante un hilo que mide 50 m y que forma con la horizontal un ángulo de 60° . ¿A qué altura está la cometa?

18. Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

19. El radar de un barco detecta un objeto a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?

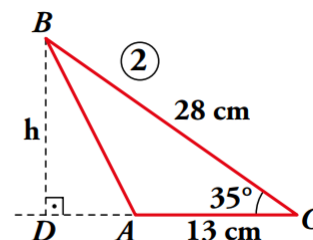
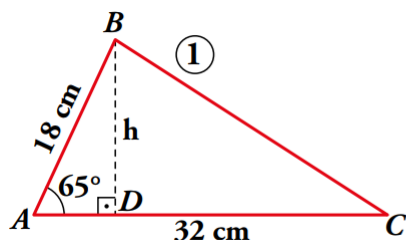
20. Halla la altura de la colina $\overline{SH}$.



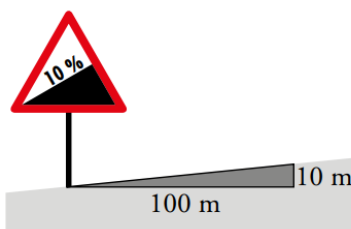
21. Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.

22. Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

23. Calcula la altura, h , y el área de cada triángulo:



24. La señal de la figura siguiente nos indica una pendiente del 10 %. Es decir, cada 100 m en horizontal se suben 10 m en vertical. ¿Qué ángulo corresponde a esa pendiente?



25. Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas:

a) 128° , b) 198° , c) 87° , d) 98° , e) 285° , f) 305° , g) 1320° , h) 740° , i) -105° .

26. Explica en qué cuadrante está α en cada caso y calcula las razones trigonométricas que faltan:

- a) $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha < 0$.
- b) $\cos \alpha = -1/3$; $\operatorname{tg} \alpha > 0$.
- c) $\operatorname{tg} \alpha = -2$; $\sin \alpha > 0$.
- d) $\sin \alpha = -2/3$; $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

27. Justifica en qué cuadrante está α , en cada caso, y calcula las restantes razones trigonométricas:

- a) $\sin \alpha = 4/5$; $\alpha < 90^\circ$.
- b) $\cos \alpha = 2/3$; $\alpha > 270^\circ$.
- c) $\operatorname{tg} \alpha = 3$; $\alpha > 180^\circ$.
- d) $\cos \alpha = -3/4$; $\alpha < 180^\circ$.

28. Contesta a las siguientes cuestiones:

- a) Expresa en radianes los ángulos 30° , 45° , 60° y 90° a partir de la equivalencia $180^\circ = \pi \text{ rad}$.
- b) Expresa en radianes los siguientes ángulos teniendo en cuenta que son múltiplos de los anteriores: 150° , 135° , 240° , 300° y 270° .
- c) Halla, con la calculadora, las razones de los ángulos del apartado anterior expresados en radianes.

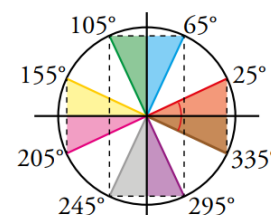
29. Expresa en grados los siguientes ángulos: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{5}$. Di cuál es el signo de sus razones trigonométricas.

30. Indica en qué cuadrante se encuentra el ángulo α en cada caso:

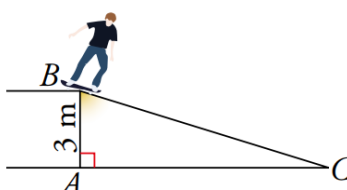
- a) $\sin \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$, b) $\sin \alpha > 0$ y $\operatorname{tg} \alpha > 0$, c) $\sin \alpha < 0$ y $\operatorname{tg} \alpha > 0$, d) $\sin \alpha < 0$ y $\operatorname{tg} \alpha < 0$

31. Considera las siguientes razones trigonométricas: $\sin 25^\circ = 0,42$; $\cos 25^\circ = 0,91$ y $\operatorname{tg} 25^\circ = 0,47$. Observa la figura de la derecha e indica el valor de estas otras:

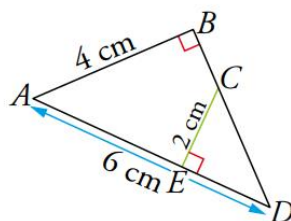
a) $\sin 205^\circ$, b) $\cos 65^\circ$, c) $\cos 245^\circ$, d) $\operatorname{tg} 115^\circ$, e) $\sin 295^\circ$, f) $\operatorname{tg} 335^\circ$



32. Se quiere construir una rampa de 3 m de altura para un campeonato de skateboard. El reglamento dice que el ángulo en el punto de salto debe estar entre 70° y 75° . ¿Cuál puede ser la longitud de la rampa?

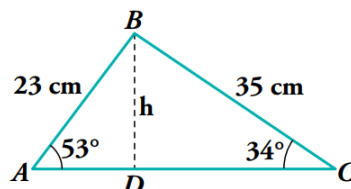


33. Escribe de dos formas $\sin D$ utilizando los triángulos ABD y CED . Calcula las longitudes de CD , ED , BD y BC .



34. En una circunferencia de radio 6 cm trazamos una cuerda AB a 3 cm del centro O . Halla el ángulo AOB .

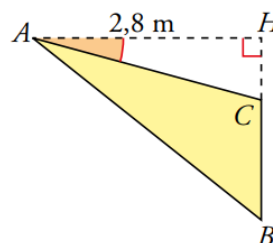
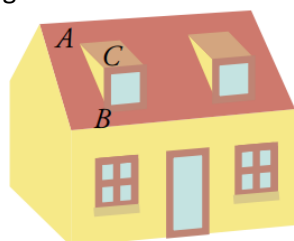
35. Observa la siguiente figura y halla la longitud $\overline{AC}$ y el área del triángulo ABC .



36. El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38° . ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

37. Halla el área de un paralelogramo cuyos lados miden 16 cm y 24 cm y forman un ángulo de 40° .

38. Esta es la sección de un tragaluz de esta casa:

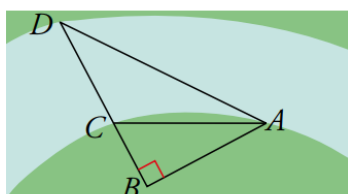


Además de la longitud $\overline{AH} = 2,8$ m, se han medido los ángulos $HAC = 16^\circ$ y $HAB = 40^\circ$. Calcula $\overline{CH}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

39. El funicular de Bulnes (Asturias) tiene una longitud de 2227 m. La altura de la estación inferior es 183 m, y la de la estación superior, 585 m. Calcula el ángulo que forma la línea del funicular con la horizontal, y la pendiente del mismo en porcentaje.

40. Dos edificios distan entre sí 90 m. Desde un punto que está entre los dos edificios vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20° . ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que uno es 6 m más alto que el otro?

41. Las diagonales de un rectángulo forman un ángulo de 52° y su lado mayor mide 14 cm. Halla su perímetro y la longitud de sus diagonales.
42. Para medir la altura de un edificio, un antenista se sitúa a 10 m del mismo y mide el ángulo de la visual al punto más alto, que es 72° . El punto de observación está a 1,70 m del suelo. Calcula la altura del edificio.
43. En un huerto hay un pozo de 1,2 m de ancho. Cuando está vacío vemos, desde el brocal, el borde opuesto del fondo bajo un ángulo de 70° con la horizontal. Cuando el agua sube, vemos el borde opuesto del agua bajo un ángulo de 42° . ¿Cuál es la altura del pozo? ¿Cuánto subió el agua?
44. Carmen y Paco salen a correr desde dos puntos A y B distantes entre sí 1,2 km y quieren encontrarse en un punto C . La dirección que toma Carmen forma un ángulo de 35° con AB , y la de Paco, un ángulo de 48° también con AB . ¿Cuál de los dos tiene que hacer un camino más largo?
45. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.
46. En un trapecio isósceles de bases AB y DC , conocemos los lados $AB = 5$ m y $BC = 3\sqrt{2}$ m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de 45° . Halla su área.
47. Queremos conocer el ancho de un río y para ello tomamos estas medidas: $BAD = 54^\circ$; $BAC = 28^\circ$; $ABD = 90^\circ$ y $AB = 80$ m ¿Cuál es el ancho del río?



48. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables, que forman con la antena ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan 98 m entre sí. Calcula la altura de la antena.
49. Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.
50. De un triángulo ABC conocemos los ángulos $A = 62^\circ$, $C = 34^\circ$ y el lado $c = 5$ cm. Halla su área y su perímetro.
51. Observa estas tres circunferencias goniométricas en las que se ha dibujado un ángulo α del primer cuadrante y, a partir de él, los ángulos $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ y $360^\circ - \alpha$ en los cuadrantes 2º, 3º y 4º, respectivamente. Busca la relación que existe entre:

$\text{sen}(180^\circ - \alpha)$ y $\text{sen } \alpha$	$\text{sen}(180^\circ + \alpha)$ y $\text{sen } \alpha$	$\text{sen}(360^\circ - \alpha)$ y $\text{sen } \alpha$
$\text{cos}(180^\circ - \alpha)$ y $\text{cos } \alpha$	$\text{cos}(180^\circ + \alpha)$ y $\text{cos } \alpha$	$\text{cos}(360^\circ - \alpha)$ y $\text{cos } \alpha$
$\text{tg}(180^\circ - \alpha)$ y $\text{tg } \alpha$	$\text{tg}(180^\circ + \alpha)$ y $\text{tg } \alpha$	$\text{tg}(360^\circ - \alpha)$ y $\text{tg } \alpha$

52. Si $\sin \alpha = \sqrt{3}/4$ y α es un ángulo agudo, halla las siguientes razones trigonométricas sin hallar α :

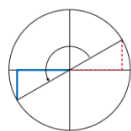
a) $\sin(180^\circ + \alpha)$, b) $\cos(180^\circ - \alpha)$, c) $\sin(360^\circ - \alpha)$, d) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$

53. Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y expresa sus razones trigonométricas utilizando un ángulo agudo, como en el ejemplo:

$$\sin 215^\circ = -\sin 35^\circ$$

$$\cos 215^\circ = -\cos 35^\circ$$

$$\operatorname{tg} 215^\circ = \operatorname{tg} 35^\circ$$



a) 150° , b) 240° , c) 300° , d) 225° , e) 100° , f) 320°

54. Determina, en cada caso, qué ángulos del intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$ verifican las siguiente igualdades:

a) $\cos \alpha = 0,5$, b) $\sin \alpha = -1$, c) $\cos \alpha = 1$, d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, e) $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$, f) $\operatorname{tg} \alpha = -1$

55. Halla, en cada caso, el ángulo α que verifica las condiciones dadas, como en el ejemplo:

$$\sin \alpha = \sqrt{3}/2, 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \arcsin \sqrt{3}/2 = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

a) $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; b) $\sin \alpha = -0,5$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$; c) $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

56. Halla los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican estas ecuaciones, como en el ejemplo:

$$1 - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos x = 1/2 \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{cases}$$

a) $2 \sin x = \sqrt{3}$, b) $2 \sin x = -\sqrt{2}$, c) $3 \operatorname{tg} x + 3 = 0$, d) $\sin^2 x = 1$,

e) $\sin^2 x - \sin x = 0$, f) $4 \sin^2 x - 1 = 0$, g) $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

57. Usando las relaciones fundamentales, demuestra estas igualdades:

$$\text{a) } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2, \text{ b) } \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

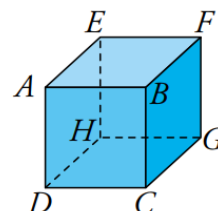
$$\text{c) } \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ d) } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

58. Dos circunferencias secantes tienen radios de 6 cm y 10 cm. Sus tangentes comunes forman un ángulo de 40° . Calcula la distancia entre sus centros.

59. La figura $ABCDEFGH$ es un cubo de arista a (ver figura de la derecha):

a) Expresa, en función de a , la diagonal de una cara, $\overline{DG}$, y la diagonal del cubo, $\overline{AG}$.

b) Calcula el ángulo que forman DG y AG .



60. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide 6 m y el ángulo $APD = 60^\circ$ (ver figura de la derecha). Halla su volumen.

Nota: el volumen V de una pirámide cuadrangular regular es $V = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h$, donde l es el lado de la base y h la pirámide.

