

CUADERNO DE TRABAJO · IES SALMEDINA

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

TOMO 1

Combinatoria



2.º de Bachillerato · Ciencias

Teoría y ejercicios · Cuadernillo del alumnado

Francisco José Valladares Herrera

Curso 2026–2027

ÍNDICE GENERAL

Introducción a la matemática discreta	2
1. Combinatoria	3
1.1. Antes de contar: entender qué estamos contando	4
1.2. Principios fundamentales de recuento	5
1.3. Una notación útil: el factorial	6
1.4. Variaciones sin repetición: elegir y ordenar	7
1.5. Variaciones con repetición: llenar posiciones	8
1.6. Permutaciones sin repetición: ordenar todos los elementos	9
1.7. Permutaciones con repetición: ordenar objetos indistinguibles	9
1.8. Combinaciones sin repetición: elegir un grupo	11
1.9. Combinaciones con repetición: elegir cantidades de cada tipo	12
1.10. Un caso especial: permutaciones circulares	14
1.11. Elegir una técnica con sentido	15
Ejercicios	17
Bibliografía y webgrafía	20

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DISCRETA

¿Sabes? Si nos alejamos de las mates que nos enseñan en el instituto, nos encontramos con los problemas de nuestra vida moderna. ¿Quién ha utilizado una ecuación de segundo grado para comprar y recibir un paquete del Shein? ¿o quién ha usado el mínimo común múltiplo para seguir o bloquear a alguien en Instagram?. Bienvenidos a las matemáticas que por fin vas a usar (o van a usar diariamente para ti).

A veces trabajamos con objetos separados y perfectamente distinguibles: personas, rutas, horarios, contraseñas, conexiones o posibilidades. Cuando las piezas se pueden contar, ordenar o relacionar una a una, entramos en el territorio de la **matemática discreta**.

En los tres primeros tomos comenzaremos con la **combinatoria**, que nos enseña a contar posibilidades sin tener que enumerarlas todas. Después estudiaremos la **aritmética modular**, imprescindible para comprender calendarios, ciclos, códigos y sistemas de numeración. Finalmente nos acercaremos a la **teoría de grafos**, que permite representar y analizar redes como las de un GPS, una red social o el reparto de un paquete.

La matemática discreta aparece continuamente a nuestro alrededor, aunque muchas veces se esconda con bastante discreción. Su objetivo no es solo obtener resultados, sino aprender a organizar la información, reconocer patrones y tomar decisiones de forma razonada.

Una lástima que no se enseñe mucho antes todo esto.

Att. Fran Valladares.

TOMO 1

COMBINATORIA

Comprar en el Zara, elegir la ropa en el GTA VI, echarse un cubata con un refresco, organizar un torneo del FIFA o seleccionar una lista de canciones de Spotify son situaciones que esconden una misma pregunta: *¿cuántas posibilidades hay?*.

Esto no te lo esperabas, confiesa.

La **combinatoria** estudia cómo contar, seleccionar y ordenar elementos sin tener que escribir todas las posibilidades una a una. Sus técnicas también se utilizan en informática, en el diseño de horarios y en probabilidad.

Ejemplo 1: Un personaje con muchas posibilidades

Imagina que al inicio del GTA VI se te permite elegir únicamente entre cuatro camisetas y tres pantalones. *¿Cuántas formas hay de combinarlo?*

Meh, eres un/a pro, y lo sabes perfectamente: Cada camiseta puede combinarse con cualquiera de los tres pantalones, así que hay

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

atuendos diferentes. Podemos contarlos sin dibujar los doce personajes.

Vestir un personaje

Una camiseta y un pantalón en cada atuendo.



Cada elección de camiseta permite tres elecciones de pantalón.

1.1. ANTES DE CONTAR: ENTENDER QUÉ ESTAMOS CONTANDO

Problema inicial: Una pareja o dos cargos

Dado un bonito trío, Ana, Bruno y Carmen, queremos elegir solo a dos personas.

- ¿Cuántas posibilidades hay de elegir las si solo formamos una pareja?
- ¿Cuántas hay si debemos elegir a una persona portavoz y a otra secretaria?

Antes de contar, necesitamos precisar qué hace diferentes a dos resultados.

Propiedades

Antes de hacer operaciones, conviene responder a estas preguntas:

- ¿Qué es un resultado?** Una lista, un grupo, una distribución de objetos, un código...
- ¿Importa el orden?** Intercambia dos elementos: si el resultado cambia, el orden importa.
- ¿Se puede repetir?** Decide si un mismo elemento o tipo puede aparecer más de una vez.
- ¿Hay restricciones?** Por ejemplo, un dígito inicial prohibido, cantidades limitadas o cargos incompatibles.

Un recuento correcto incluye todos los resultados admitidos y cuenta cada uno exactamente una vez.

Ejemplo 2: Las mismas personas para dos elecciones diferentes

Para que veáis lo importante de cómo se plantea un enunciado, comparemos dos maneras de elegir entre Ana, Bruno y Carmen:

- a) **Formar una pareja.** Las posibilidades son

$\{\text{Ana, Bruno}\}, \{\text{Ana, Carmen}\}, \{\text{Bruno, Carmen}\}$

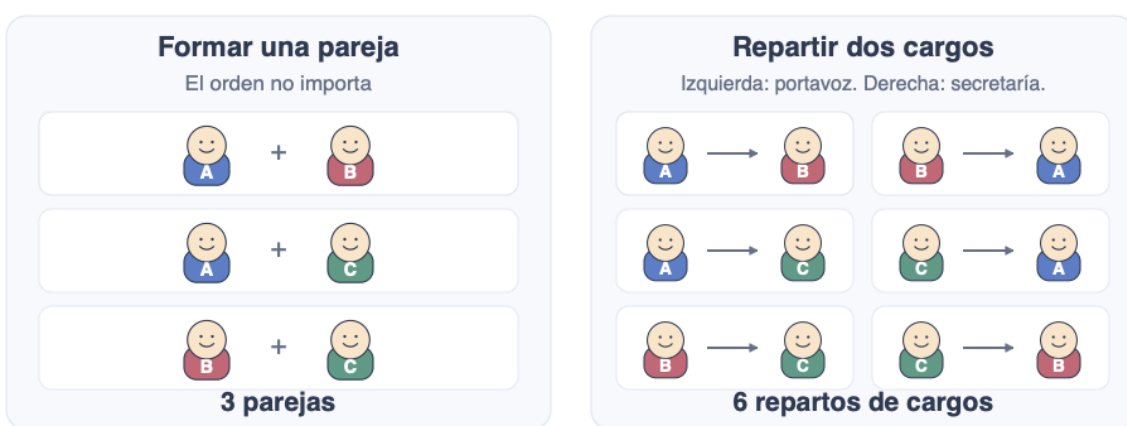
Hay tres parejas.

- b) **Repartir dos cargos.** Si eligen una persona portavoz y otra secretaria, cada pareja permite dos repartos de los cargos: ahora hay seis resultados.

Las personas disponibles son las mismas; lo que cambia es qué consideramos un resultado diferente.

Las mismas personas, dos formas de elegir

A: Ana B: Bruno C: Carmen



Cambiar el orden de los nombres conserva la pareja, pero puede cambiar los cargos.

1.2. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE RECuento

Problema inicial: Elegir un taller y preparar una merienda

- a) **El taller.** Un centro ofrece tres talleres deportivos y dos artísticos, todos distintos. Si debes escoger un solo taller, ¿cuántas opciones tienes?
- b) **La merienda.** En una cafetería hay cuatro bocadillos y tres bebidas. Todas las combinaciones están disponibles. Si una merienda incluye un bocadillo y una bebida, ¿cuántas meriendas diferentes puedes preparar?

En el primer caso elegimos entre alternativas; en el segundo, construimos el resultado mediante dos elecciones sucesivas.

Proposición 1: Principio de la suma

Si los resultados se separan en casos que no se solapan, con $a_1, a_2, \dots, a_k$ posibilidades respectivamente, el número total es

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

Teorema 1: Principio del producto

Supongamos que un resultado se construye en k pasos. Hay a_1 opciones para el primero y, tras cualquier elección válida anterior, el paso i tiene exactamente a_i opciones disponibles, así sucesivamente hasta el a_k . Esto describe un número total de opciones:

$$a_1 a_2 \dots a_k$$

Ejemplo 3: Elegir una actividad o preparar una merienda

- a) **Elegir una actividad.** Para escoger un taller sumamos: $3 + 2 = 5$ opciones.
- b) **Preparar una merienda.** Para preparar la merienda multiplicamos: $4 \cdot 3 = 12$ opciones.

La diferencia está en cómo se construye el resultado: un taller pertenece a uno de dos grupos separados; una merienda requiere completar dos elecciones sucesivas.

1.3. UNA NOTACIÓN ÚTIL: EL FACTORIAL

A un *buen matemático que se precie*, le gusta simplificar expresiones, y, a ser posible, usar notaciones chulas para creerse superior al resto de los mortales. Así nació el **factorial**.

Definición

Para un entero $n \geq 1$, se llama **factorial de n** al producto

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$$

Además, se define $0! = 1$ por convenio. Esta convención concuerda con que hay una única manera de ordenar cero objetos: la disposición vacía.

Ejemplo 4: Calcular y simplificar factoriales

- a) **¿Cuántas formas hay de ordenar cuatro libros distintos?** Hay cuatro opciones para la primera posición, tres para la segunda, dos para la tercera y una para la última:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Por tanto, podemos formar 24 ordenaciones diferentes.

- b) **Simplificar un cociente de factoriales.** Podemos cancelar los factores comunes

sin calcular los factoriales completos:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6$$

En lo que sigue, n y r representan cantidades enteras. Trabajaremos con $n \geq 1$ y $r \geq 0$; si no se permiten repeticiones, exigiremos también $r \leq n$ para poder realizar la selección.

1.4. VARIACIONES SIN REPETICIÓN: ELEGIR Y ORDENAR

Problema inicial: El podio de un torneo

Ocho jugadores compiten en un torneo de FIFA 26 sin empates. ¿Cuántos podios distintos hay si distinguimos primer, segundo y tercer puesto?

Aquí importa el orden: quedar primero no es lo mismo que quedar segundo. Además, un jugador no puede ocupar dos puestos.

Definición

Una **variación sin repetición** de n elementos distintos tomados de r en r es una selección *ordenada* de r de esos elementos, sin utilizar ninguno más de una vez. Denotamos por $V_{n,r}$ su número.

Proposición 2: Número de variaciones sin repetición

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Para $r \geq 1$, equivale al producto de r factores $n(n-1) \cdots (n-r+1)$ que resulta de contar las opciones de cada posición.

Ejemplo 5: Los posibles podios

$$V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Podemos elegir entre ocho ganadores; después quedan siete candidatos al segundo puesto y seis al tercero. Hay **336 podios**.

Un podio, tres elecciones

Ocho jugadores distintos. Cada jugador puede ocupar un solo puesto.



Después de elegir a un jugador, queda una opción menos para el siguiente puesto.

1.5. VARIACIONES CON REPETICIÓN: LLENAR POSICIONES

Problema inicial: Un código de acceso

Una aplicación utiliza códigos de cuatro cifras, del 0 al 9. Se permite repetir cifras y empezar por cero; por ejemplo, 0073 es válido. ¿Cuántos códigos diferentes admite?

Definición

Una **variación con repetición** de n elementos distintos tomados de r en r es una lista ordenada de longitud r en la que cada posición puede contener cualquiera de esos elementos. En otras palabras... se permite utilizar un mismo elemento varias veces. Usaremos $VR_{n,r}$ para denotar el número de estas listas.

Proposición 3: Número de variaciones con repetición

$$VR_{n,r} = n^r$$

Ejemplo 6: Códigos y números

- a) **Códigos de cuatro cifras.** Hay $10^4 = 10000$ códigos. El orden importa: 1234 y 4321 son códigos distintos.
- b) **¿Y si hubiésemos dicho que solo admite números naturales de cuatro cifras?** La primera cifra no puede ser cero. El recuento cambia a

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

Las condiciones del problema determinan las opciones de cada posición.

1.6. PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN: ORDENAR TODOS LOS ELEMENTOS

Problema inicial: Una estantería de videojuegos

Tienes seis cajas de videojuegos distintos y quieres colocarlas en una fila en la estantería. ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?

Definición

Una **permutación sin repetición** de n elementos distintos es una ordenación de todos ellos, utilizando cada uno exactamente una vez. Usaremos P_n para denotar su número.

Proposición 4: Número de permutaciones sin repetición

$$P_n = n!$$

Demostración

Se trata de una variación sin repetición en la que $r = n$:

$$P_n = V_{n,n} = \frac{n!}{0!} = n!$$

También podemos elegir sucesivamente entre $n, n-1, \dots, 1$ objetos para ocupar las posiciones.

Ejemplo 7: Ordenar la colección

a) **Colocar las seis cajas.**

$$P_6 = 6! = 720$$

Hay **720 ordenaciones**.

b) **¿Y si queremos colocar solo tres de las seis cajas?** Usamos variaciones sin repetición, pues elegimos y ordenamos una parte de la colección:

$$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

1.7. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN: ORDENAR OBJETOS INDISTINGUIBLES

Problema inicial: Una fila de fichas de colores

Tenemos siete fichas: tres rojas, dos azules y dos verdes. Las fichas del mismo color son indistinguibles. ¿Cuántas filas diferentes pueden formarse utilizando las siete?

Definición

Una **permutación con repetición** es una ordenación de n objetos repartidos en k tipos, con $a_1, a_2, \dots, a_k$ objetos de cada tipo, donde

$$a_1 + \dots + a_k = n$$

Las cantidades están fijadas y los objetos de un mismo tipo son indistinguibles. Intercambiar dos de ellos no produce una nueva ordenación. Usaremos $PR_n^{a_1, \dots, a_k}$ para denotar su número.

Proposición 5: Número de permutaciones con repetición

$$PR_n^{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$$

Demostración

Imaginemos que ponemos etiquetas diferentes a todos los objetos. Así habría $n!$ ordenaciones. Al quitar las etiquetas, cada fila queda contada $a_1! \dots a_k!$ veces: podemos intercambiar entre sí las etiquetas de cada tipo sin modificar la fila visible. Dividimos por ese número para contar cada fila una sola vez.

Ejemplo 8: Ordenar los colores

$$PR_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Hay **210 filas**. No usamos 3^7 , porque esa expresión permitiría cualquier cantidad de cada color; aquí debemos utilizar exactamente tres fichas rojas, dos azules y dos verdes.

Fichas iguales y fichas diferentes

En todas las filas: 3 rojas (R), 2 azules (A) y 2 verdes (V).

Intercambiar dos rojas



Intercambiar una roja y una azul



Intercambiar fichas indistinguibles no crea una ordenación nueva.

1.8. COMBINACIONES SIN REPETICIÓN: ELEGIR UN GRUPO

Problema inicial: Un equipo para representar a la clase

Entre ocho estudiantes se elige un equipo de tres, sin asignar cargos. ¿Cuántos equipos diferentes pueden formarse?

En el podio distinguíamos primero, segundo y tercero. En este problema, un equipo sigue siendo el mismo aunque escribamos sus nombres en otro orden.

Definición

Una **combinación sin repetición** de n elementos distintos tomados de r en r es un subconjunto de r elementos. El orden no importa y ningún elemento aparece más de una vez. Su número se denota por

$$C_{n,r} = \binom{n}{r}$$

y $\binom{n}{r}$ se lee « n sobre r ».

Proposición 6: Número de combinaciones sin repetición

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Demostración

Si contamos selecciones ordenadas, obtenemos $V_{n,r}$ posibilidades. Pero cada grupo aparece en las $r!$ ordenaciones de sus miembros. Por tanto,

$$V_{n,r} = \binom{n}{r} r!, \quad \binom{n}{r} = \frac{V_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Propiedades

Los números combinatorios verifican

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Hay una sola manera de no elegir ningún elemento y una sola de elegirlos todos. La simetría tiene una explicación: elegir los r elementos que entran determina exactamente los $n-r$ que quedan fuera.

Ejemplo 9: Equipos y bolas de bingo

a) **Elegir un equipo.** El número de equipos es

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

b) **Extraer dos bolas de bingo.** Si de un bombo con 90 bolas distintas extraemos dos sin devolverlas y solo anotamos *qué dos números han salido*, hay

$$\binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$$

parejas posibles. Si registrásemos también el orden de salida, contaríamos $90 \cdot 89$ resultados.

1.9. COMBINACIONES CON REPETICIÓN: ELEGIR CANTIDADES DE CADA TIPO

Problema inicial: Una tarrina de helado

Una heladería ofrece cuatro sabores. Queremos una tarrina con tres bolas; podemos repetir sabor y hay suficiente cantidad de todos. Solo importa cuántas bolas pedimos de cada sabor, no su colocación. ¿Cuántos pedidos diferentes podemos hacer?

El mismo pedido de helado

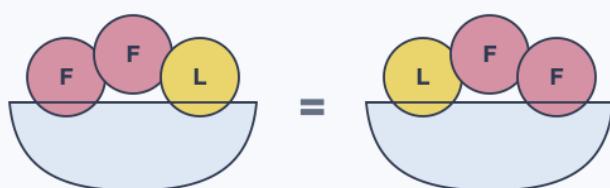
Tres bolas elegidas entre cuatro sabores. Se permite repetir sabor.

F Fresa

C Chocolate

L Limón

V Vainilla



Mismas cantidades de cada sabor

Cantidades del pedido

Fresa	2
Chocolate	0
Limón	1
Vainilla	0

El pedido depende de las cantidades de cada sabor, no del orden de las bolas.

Definición

Una **combinación con repetición** de n tipos tomados de r en r es una selección de r elementos en la que el orden no importa y se permite repetir tipo. Equivale a escoger

cantidades enteras no negativas

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

donde x_i indica cuántos elementos del tipo i elegimos. Usaremos $CR_{n,r}$ para denotar el número de estas selecciones.

Proposición 7: Número de combinaciones con repetición

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Demostración

Para entender la fórmula, vamos a transformar cada selección en una cadena de símbolos. Primero fijamos un orden para los n tipos. Por ejemplo, podemos ordenar cuatro sabores así: vainilla, chocolate, fresa y limón.

Una selección queda determinada por la cantidad elegida de cada tipo. Si elegimos dos bolas de vainilla, ninguna de chocolate, una de fresa y ninguna de limón, las cantidades son

$$(2, 0, 1, 0)$$

Ahora representamos cada bola mediante una estrella y colocamos una barra entre dos tipos consecutivos. Como hay cuatro tipos, necesitamos tres barras. La representación es

$$\star\star || \star |$$

Para leer esta cadena de izquierda a derecha, contamos las estrellas que aparecen antes de la primera barra, entre la primera y la segunda, entre la segunda y la tercera, y después de la tercera. Obtenemos respectivamente las cantidades

$$2, \quad 0, \quad 1, \quad 0$$

Las dos barras juntas indican que no hemos elegido ningún elemento del segundo tipo. La última barra aparece al final porque no hemos elegido elementos del cuarto tipo. Por tanto, las barras consecutivas o situadas en los extremos no son un problema: simplemente representan cantidades iguales a cero.

El procedimiento puede hacerse al revés. Si conocemos las cantidades, colocamos primero las estrellas de cada tipo y las separamos con barras. Por eso, cada selección produce una única cadena y cada cadena produce una única selección. No estamos contando dos veces la misma selección.

Pasemos ahora a contar las cadenas. Siempre hay r estrellas porque la selección tiene r elementos. También hay $n - 1$ barras porque son necesarias para separar los n tipos. En total, cada cadena tiene

$$r + n - 1$$

posiciones en total.

Para construir una cadena solo tenemos que decidir en qué r posiciones colocamos las estrellas. Las posiciones restantes quedarán ocupadas por las $n - 1$ barras. El nú-

mero de formas de elegir esas posiciones se puede escribir así:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Finalmente, la definición del número combinatorio transforma esta expresión en la forma factorial:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Este razonamiento recibe el nombre de **método de estrellas y barras**. Su idea esencial es convertir una elección de cantidades en una cadena ordenada de estrellas y separadores.

Ejemplo 10: Contar los pedidos de helado

$$CR_{4,3} = \binom{6}{3} = 20$$

Hay **20 pedidos**. También podemos comprobarlo separando casos:

- a) Tres bolas del mismo sabor: 4 opciones.
- b) Dos de un sabor y una de otro: $4 \cdot 3 = 12$ opciones.
- c) Tres sabores distintos: $\binom{4}{3} = 4$ opciones.

La suma confirma el resultado:

$$4 + 12 + 4 = 20$$

No basta con dividir 4^3 entre $3!$: un pedido con tres sabores distintos tiene seis órdenes posibles, pero uno con tres bolas del mismo sabor solo tiene uno. No se puede corregir todo el recuento dividiendo por un mismo factor.

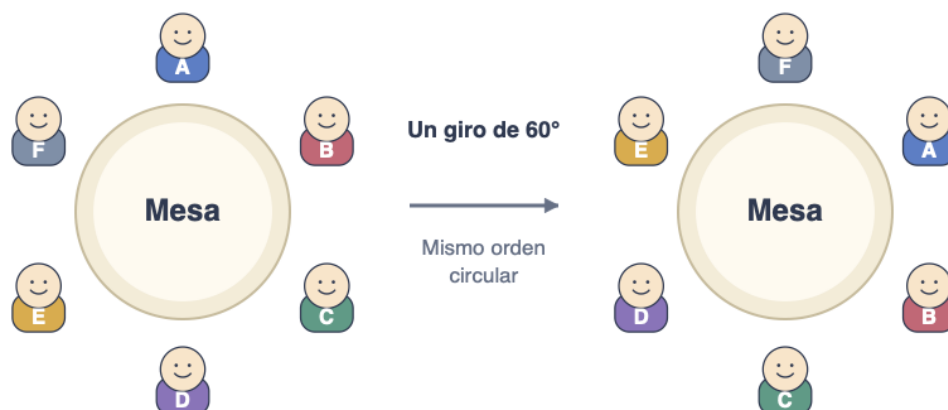
1.10. UN CASO ESPECIAL: PERMUTACIONES CIRCULARES

Problema inicial: Una mesa redonda

Seis amigos se sientan alrededor de una mesa redonda con asientos sin numerar. Consideramos iguales dos distribuciones si una se obtiene girando toda la otra. Las distribuciones reflejadas se consideran distintas. ¿Cuántas distribuciones hay?

Girar conserva la distribución

Seis amigos alrededor de una mesa con asientos sin numerar.



Las dos mesas representan una sola distribución circular.

Definición

Una **permutación circular** de n elementos distintos es una disposición en círculo en la que las rotaciones se consideran equivalentes. No identificamos una disposición con su reflejo.

Proposición 8: Número de permutaciones circulares

Para $n \geq 1$, el número de permutaciones circulares es

$$PC_n = (n - 1)!$$

Demostración

Tomamos a una persona como referencia. Cada distribución circular queda determinada por el orden de las otras $n - 1$ personas, recorriendo la mesa en sentido horario a partir de ella. Hay $(n - 1)!$ órdenes posibles.

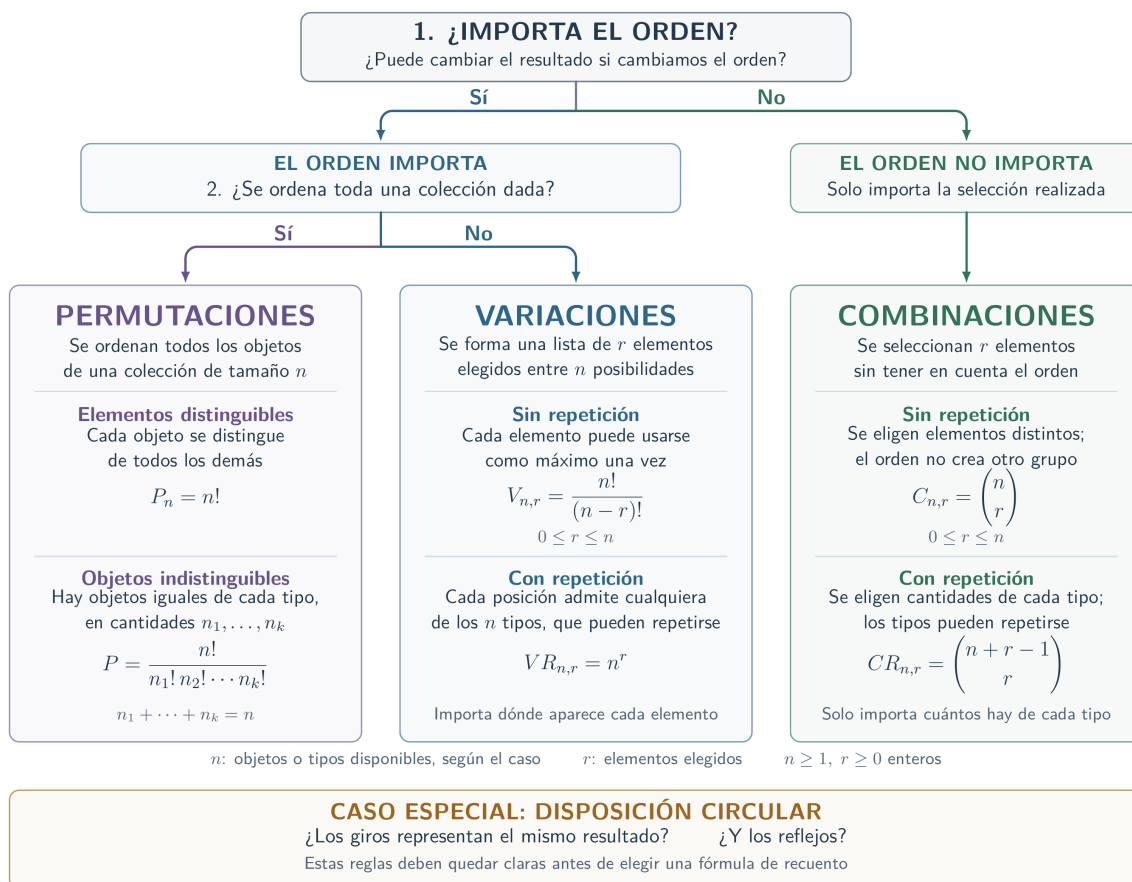
Ejemplo 11: Sentarse alrededor de la mesa

- Asientos sin numerar.** Considerando equivalentes los giros, hay $PC_6 = 5! = 120$ distribuciones.
- Asientos numerados.** Si distinguimos qué asiento ocupa cada persona, hay $6! = 720$ distribuciones: un giro ya puede cambiar la distribución.

1.11. ELEGIR UNA TÉCNICA CON SENTIDO

Pues nada señores, como resumen de todo lo anterior, yo cuando me enfrento a un problema interesante de combinatoria siempre me viene a la cabeza las siguientes preguntas para distinguir un tipo de otro:

¿Qué tipo de recuento necesitamos?



Antes de sustituir números, escribe una frase que explique *qué estás contando y por qué esa técnica sirve*. Esa justificación es una parte esencial de la solución.

EJERCICIOS

Trabajo individual. Los ejercicios avanzan desde recuentos directos hasta problemas que combinan varias condiciones. En cada caso, explica qué consideras un resultado diferente, si importa el orden y si se permiten repeticiones. Justifica la técnica elegida antes de calcular.

Tiempo orientativo: dos sesiones de 50 minutos.

Ejercicio 1 — La cafetería del recreo

Una cafetería ofrece cuatro bocadillos distintos, tres bebidas distintas y dos postres distintos. Todas las combinaciones están disponibles.

- a) ¿Cuántas meriendas puedes formar con un bocadillo y una bebida?
- b) ¿Cuántas opciones hay si añades también un postre?
- c) Si solo compras un producto, que puede ser un bocadillo o una bebida, ¿cuántas elecciones distintas tienes?

Ejercicio 2 — Los premios de una carrera

Nueve estudiantes participan en una carrera sin empates.

- a) ¿Cuántos podios distintos pueden formarse con el primer, segundo y tercer puesto?
- b) Si se entrega además un diploma a quien ocupa el cuarto puesto, ¿cuántas listas ordenadas de cuatro premiados son posibles?

Ejercicio 3 — El código de una taquilla

Una taquilla se abre con un código de cuatro cifras elegidas entre el 0 y el 9. El código puede comenzar por cero.

- a) ¿Cuántos códigos hay si se permite repetir cifras?
- b) ¿Cuántos hay si las cuatro cifras deben ser distintas?
- c) Explica por qué estos recuentos no describen elecciones de grupos de cuatro cifras sin ordenar.

Ejercicio 4 — Una estantería de ciencias

En una estantería se colocan en fila siete libros distintos. Dos de ellos son de matemáticas.

- a) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse los siete libros?
- b) ¿Cuántas ordenaciones hay si los dos libros de matemáticas deben quedar juntos? Puedes considerar inicialmente esos dos libros como un bloque; recuerda después su orden dentro del bloque.

Ejercicio 5 — Una fila de iconos

Un videojuego muestra una fila de ocho iconos: tres estrellas, tres corazones y dos lunas. Los iconos del mismo tipo son indistinguibles.

- a) ¿Cuántas filas diferentes pueden formarse utilizando los ocho iconos?
- b) ¿Cuántas de esas filas tienen una luna en cada extremo?

Ejercicio 6 — La comisión del torneo

Doce estudiantes se ofrecen para organizar un torneo. Siete pertenecen al taller de programación y los otros cinco al de robótica; nadie pertenece a ambos talleres. Se elige una comisión de cuatro personas, sin asignar cargos. Cada apartado plantea una condición independiente.

- a) ¿Cuántas comisiones diferentes pueden formarse?
- b) Marta es una de las doce estudiantes. ¿Cuántas comisiones pueden formarse si debe pertenecer a la comisión?
- c) ¿Cuántas comisiones incluyen exactamente a dos estudiantes de cada taller?

Ejercicio 7 — Una caja de donuts

Una pastelería vende donuts de cuatro tipos: chocolate, vainilla, fresa y limón. Hay suficientes unidades de todos los tipos. Compras una caja con cinco donuts y solo importa cuántos eliges de cada tipo, no su colocación. Las condiciones de los apartados son independientes.

- a) ¿Cuántas compras diferentes puedes hacer sin más restricciones?
- b) ¿Cuántas incluyen al menos un donut de cada tipo?
- c) ¿Cuántas contienen exactamente dos donuts de chocolate?

Ejercicio 8 — Una mesa para el club de matemáticas

Siete amigos se sientan alrededor de una mesa redonda con asientos sin numerar. Dos distribuciones se consideran iguales si una es un giro de la otra; las distribuciones reflejadas se consideran distintas.

- a) ¿Cuántas distribuciones diferentes hay?
- b) ¿Cuántas hay si Ana y Bruno deben sentarse uno al lado del otro?

Ejercicio 9 — Códigos con ceros

Un minijuego utiliza códigos de cinco cifras elegidas entre el 0 y el 5, ambos incluidos. Se permite comenzar por cero.

- a) ¿Cuántos códigos contienen al menos un cero? Se permite repetir cifras.
- b) ¿Cuántos contienen exactamente un cero y tienen las otras cuatro cifras distintas entre sí?

Ejercicio 10 — Un equipo con cargos y condiciones

Entre diez estudiantes, entre los que están Ana y Bruno, se elige un equipo de cuatro. Después se nombran una persona portavoz y otra secretaria, distintas entre sí y pertenecientes al equipo. Un resultado queda determinado por los miembros del equipo y el reparto de esos dos cargos. Las condiciones de cada apartado son independientes.

- a) ¿Cuántos resultados diferentes hay sin más restricciones?
- b) ¿Cuántos hay si Ana y Bruno no pueden pertenecer a la vez al equipo?
- c) ¿Cuántos hay si Ana debe estar en el equipo, pero no puede ser portavoz?

BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

Material docente de partida

- [1] VALLADARES HERRERA, F. J. (2026). *Desafíos matemáticos. Cuadernillo completo*. IES Salmedina. Apuntes docentes para 2.º de Bachillerato de ciencias; apartado «Combinatoria» del capítulo «Introducción a la matemática discreta». Versión de septiembre de 2026, utilizada como material de partida de este tomo.