

CUADERNO DE TRABAJO · IES SALMEDINA

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

TOMO 3

Teoría de grafos



2.º de Bachillerato · Ciencias

Teoría y ejercicios · Cuadernillo del alumnado

Francisco José Valladares Herrera

Curso 2026–2027

ÍNDICE GENERAL

3. Teoría de grafos	2
3.1. Una red puede convertirse en un dibujo	2
3.2. Vecinos, grados y el apretón de manos	5
3.3. Caminos, ciclos y conectividad	6
3.4. Grafo ponderado: cuando cada calle cuesta algo	7
3.5. Recorrer todas las calles: caminos eulerianos	8
3.6. Visitar cada lugar una sola vez: caminos hamiltonianos	10
3.7. Árboles: redes sin vueltas inútiles	10
3.8. Colorear sin que se choquen los vecinos	11
Ejercicios	14
Bibliografía y webgrafía	18

TOMO 3

TEORÍA DE GRAFOS

¿Por qué Instagram, TikTok, un mapa del GPS, las paradas de un autobús, las amistades de una clase o el recorrido de un repartidor de Amazon son, matemáticamente, la misma clase de criatura?

Básicamente, porque todo se puede representar con **grafos**. Flipa.

Un grafo no es solo un dibujo bonito de puntos y líneas. Es un modelo que nos permite separar la información importante de los detalles que distraen. Si borramos los edificios de un mapa y conservamos únicamente los lugares y las conexiones entre ellos, todavía podemos estudiar rutas, atascos, contactos o posibilidades de contagio. Esa capacidad de convertir una situación real en una estructura sencilla es una de las grandes ideas de las matemáticas discretas.

3.1. UNA RED PUEDE CONVERTIRSE EN UN DIBUJO

Antes de poner nombres complicados, imaginemos que queremos orientar a una persona nueva por el IES Salmedina. Tiene que moverse entre las dos entradas, el patio, la biblioteca y las salas de trabajo, pero no necesitamos dibujar cada pasillo ni cada puerta. Basta con señalar los lugares importantes y unir los que están comunicados directamente.

Problema inicial: El mapa del instituto

En el IES Salmedina distinguimos seis zonas. Hagamos un dibujo con las conexiones directas siguientes:

- Entrada A con Patio
- Entrada B con Patio y con Sala de profesores
- Patio con Sala de tecnología
- Biblioteca con Sala de profesores y con Sala de tecnología

Dos zonas se unen cuando se puede ir de una a otra sin pasar por una tercera. ¿Qué información necesitamos para responder a estas preguntas?

- a) ¿Existe una ruta desde Entrada A hasta Biblioteca?
- b) ¿Qué zona tiene más conexiones? ¿Cuál tiene menos?
- c) ¿Podemos encontrar una ruta que pase por las seis zonas sin visitar dos veces la misma?

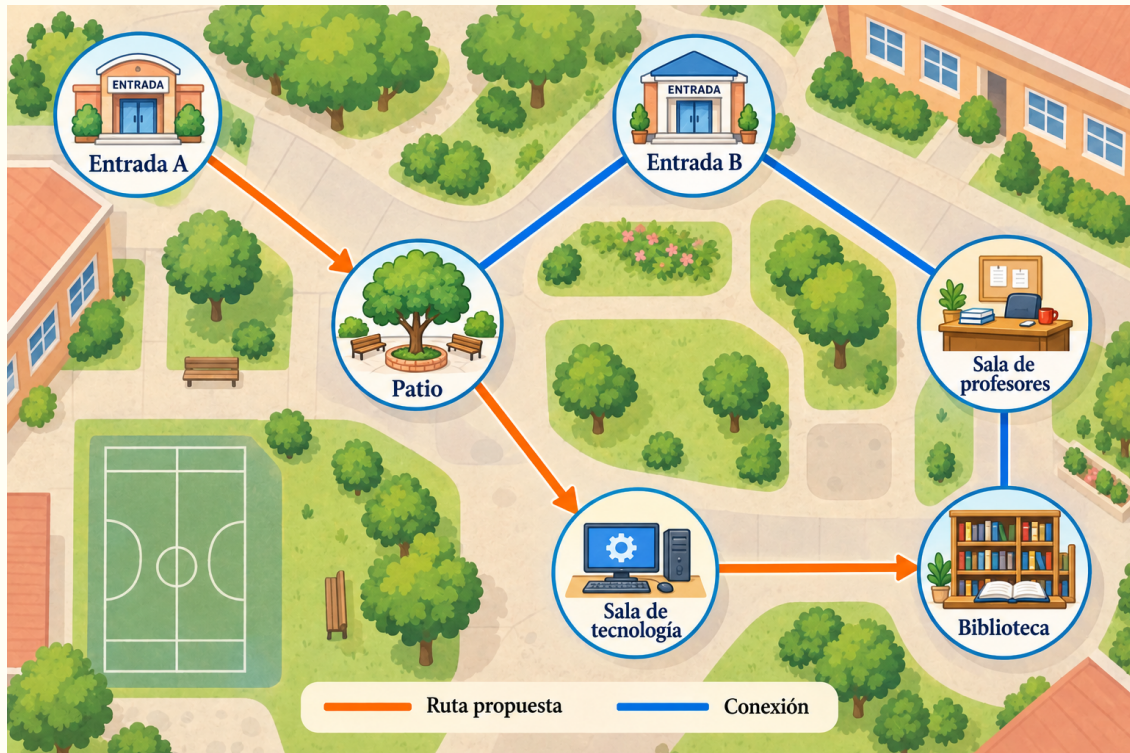
Definición

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$. El conjunto V contiene los **vértices**, que representan lugares, personas u objetos, y el conjunto E contiene las **aristas**, que representan las relaciones entre dos vértices.

El número de vértices se llama **orden** del grafo y el número de aristas se llama **tamaño**. En un grafo simple no hay aristas que unan un vértice consigo mismo ni dos aristas distintas que unan el mismo par de vértices.

Ejemplo 1: El mapa del instituto

En la imagen, cada círculo es un vértice y cada segmento es una arista. Las líneas azules representan las conexiones del IES Salmedina. La ruta naranja propone ir desde Entrada A hasta Biblioteca pasando por Patio y Sala de tecnología



El grafo tiene seis vértices y seis aristas. El Patio es la zona con más conexiones, pues enlaza Entrada A, Entrada B y Sala de tecnología. Entrada A tiene una sola conexión y es, por tanto, una hoja del grafo. Para la teoría de grafos no importa la forma exacta del edificio: importa qué zonas están conectadas.

Propiedades

Un mismo grafo puede representarse de varias maneras:

- mediante un dibujo de puntos y líneas
- mediante una lista de vecinos, escribiendo junto a cada vértice los que están conectados con él
- mediante una matriz de adyacencia, colocando un 1 si hay conexión y un 0 si no la hay

Si las conexiones se pueden recorrer en ambos sentidos, hablamos de **grafo no dirigido**. Si una conexión tiene sentido, como un enlace que lleva de una página a otra, usamos un **grafo dirigido**. Cuando cada conexión lleva asociado un tiempo, una distancia o un precio, tenemos un **grafo ponderado**.

3.2. VECINOS, GRADOS Y EL APRETÓN DE MANOS

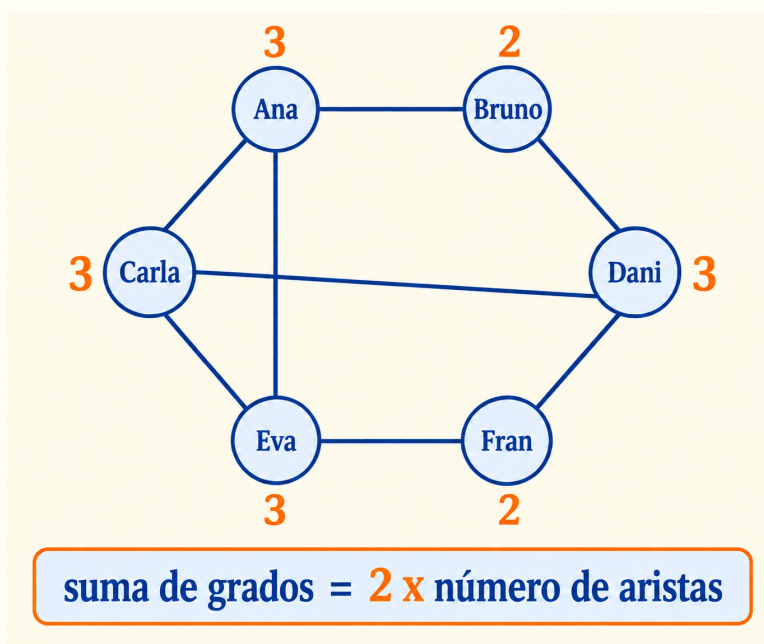
En una red es útil saber cuántas conexiones tiene cada elemento. En una clase, por ejemplo, el grado de una persona puede representar cuantos colegas tiene; en una red de carreteras, cuántas carreteras salen de una ciudad.

Definición

Dos vértices son **adyacentes** si existe una arista que los une. El **grado** de un vértice v , escrito $\deg(v)$, es el número de aristas que llegan a él en un grafo no dirigido.

Ejemplo 2: La red de amistades

En esta red, el número naranja junto a cada nombre es su grado. Ana, Carla, Dani y Eva tienen tres conexiones, mientras que Bruno y Fran tienen dos



Si contamos los grados obtenemos $3 + 2 + 3 + 3 + 3 + 2 = 16$. Como cada amistad se cuenta desde sus dos extremos, el grafo tiene $16/2 = 8$ aristas.

Proposición 1: Lema del apretón de manos

En todo grafo no dirigido finito se cumple

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Demostración

Contemos las aristas una a una. Cada arista tiene dos extremos, así que añade exactamente una unidad al grado de cada uno de sus dos vértices. Por tanto, al sumar todos los grados, cada arista aparece exactamente dos veces. Si hay $|E|$ aristas, la suma total es $2|E|$.

Una consecuencia curiosa es que el número de vértices de grado impar siempre es par. Los grados impares tienen que aparecer en parejas para que la suma total pueda ser par.

3.3. CAMINOS, CICLOS Y CONECTIVIDAD

Cuando usamos un GPS no nos interesa únicamente si dos lugares están conectados: queremos saber si existe una ruta concreta y qué ocurre si una carretera queda cortada. Para hablar con precisión debemos distinguir varias formas de recorrer un grafo.

Problema inicial: ¿Puede llegar el repartidor?

Un repartidor sale del almacén y debe entregar un paquete en la biblioteca. Algunas calles están cortadas por obras. ¿Basta con saber que el mapa tiene muchas calles o necesitamos comprobar que existe una secuencia de conexiones que una ambos lugares?

Definición

Un **recorrido** es una sucesión de vértices consecutivos unidos por aristas. Un **camino** es un recorrido en el que no se repite ningún vértice. Un **sendero** no repite aristas, aunque puede volver a pasar por un vértice. Un **ciclo** es un camino cerrado: comienza y termina en el mismo vértice y no repite los demás

Un grafo es **conexo** si existe un camino entre cualquier par de vértices. Si no es conexo, sus partes máximas conexas se llaman **componentes conexas**.

Ejemplo 3: Una ruta con vuelta

La sucesión $A - B - C - D$ es un camino de A a D . Si además existen las aristas $D - A$ y $C - A$, entonces $A - B - C - A$ es un ciclo. Una arista que, al eliminarla, separa el grafo en dos partes se llama **punto de corte**: es la carretera que nadie quiere encontrar cortada justo el día de su examen.

Propiedades

Para estudiar la conectividad podemos seguir este pequeño guión:

1. Elegir un vértice de partida
2. Marcar todos sus vecinos
3. Continuar marcando los vecinos de los vértices ya alcanzados
4. Comprobar si todos los vértices han quedado marcados

Este procedimiento es la idea básica de una búsqueda en anchura o en profundidad. Si al terminar quedan vértices sin marcar, el grafo tiene más de una componente conexa.

3.4. GRAFO PONDERADO: CUANDO CADA CALLE CUESTA ALGO

En un mapa real, dos rutas con el mismo número de calles pueden tardar tiempos muy diferentes. Una carretera puede medir más, tener tráfico o cobrar peaje. Para incluir esa información asignamos un peso a cada arista.

Problema inicial: El GPS del repartidor

El repartidor puede ir del almacén al cliente por varias rutas. Una tiene pocas calles pero mucho tráfico; otra es más larga, aunque está despejada. ¿Qué significa exactamente que una ruta sea la mejor? ¿La que usa menos aristas, la que recorre menos kilómetros o la que llega antes?

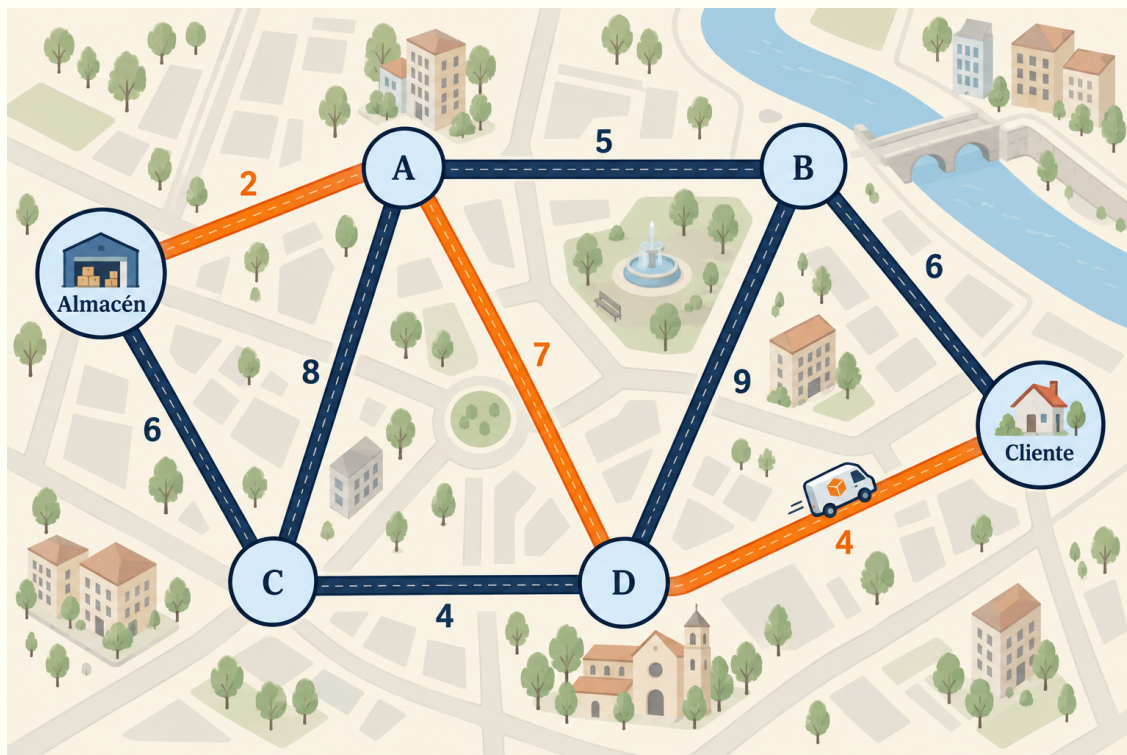
Definición

Un **grafo ponderado** es un grafo en el que cada arista tiene asociado un número llamado **peso**. El peso puede representar una distancia, un tiempo, un coste o cualquier otra magnitud.

El peso de un camino es la suma de los pesos de sus aristas. Un **camino mínimo** entre dos vértices es un camino cuyo peso total es el menor de todos los caminos que unen esos vértices.

Ejemplo 4: La entrega que llega antes

El dibujo muestra una red de calles con los tiempos estimados en minutos. La ruta naranja no tiene por qué usar menos aristas, pero sí es la de menor tiempo total entre el almacén y el cliente



Para comparar dos rutas sumamos sus pesos. El GPS hace esta comparación muchas veces por segundo, aunque no nos enseñe todas las cuentas en pantalla.

Propiedades

¿Una forma de encontrar la ruta más corta?: El **algoritmo de Dijkstra** (válido si ningún peso es negativo).

1. Al punto de partida le asignamos distancia 0. A todos los demás vértices les asignamos distancia provisional ∞ , porque todavía no conocemos ninguna ruta hasta ellos.
2. Elegimos el vértice no visitado que tenga la menor distancia provisional. Ese será el siguiente punto que podemos considerar seguro.
3. Marcamos ese vértice como visitado. A partir de ahora, su distancia ya no cambiará: con pesos no negativos, cualquier ruta que pasara por otro vértice no visitado tendría que añadir una distancia mayor o igual que cero.
4. Revisamos sus vecinos. Para cada vecino, comparamos su distancia actual con la distancia que obtendríamos pasando por el vértice recién visitado:

$$\begin{aligned} \text{distancia nueva} &= \text{distancia hasta el vértice visitado} \\ &+ \text{peso de la nueva arista} \end{aligned}$$

Si la distancia nueva es menor, sustituimos la anterior.

5. Repetimos los pasos 2, 3 y 4. Podemos detenernos cuando el destino quede marcado como visitado, porque en ese momento ya hemos encontrado su distancia mínima.

Además de guardar la distancia, conviene anotar desde qué vértice hemos llegado a cada punto. Al recorrer esas anotaciones hacia atrás podemos reconstruir la ruta completa, no solo conocer su longitud.

No es magia: Dijkstra organiza la información para que nunca tengamos que revisar una ruta que ya sabemos que no puede mejorar la solución. Si aparecen pesos negativos, este razonamiento deja de ser válido y debemos utilizar otro algoritmo.

3.5. RECORRER TODAS LAS CALLES: CAMINOS EULERIANOS

En 1736, **Leonhard Euler** recibió un problema aparentemente inocente de la ciudad de **Königsberg**. La ciudad tenía cuatro zonas de tierra unidas por siete puentes. La pregunta era si se podía salir de un punto, cruzar cada puente exactamente una vez y, quizá, regresar al punto de partida.

Problema inicial: Los siete puentes

Podemos dibujar cada zona de tierra como un vértice y cada puente como una arista. Antes de intentar rutas a lo loco, ¿qué información sobre los grados de los vértices nos podría avisar de que el paseo es imposible?

Definición

Un **camino euleriano** recorre todas las aristas de un grafo exactamente una vez. Si además comienza y termina en el mismo vértice, se llama **circuito euleriano**.

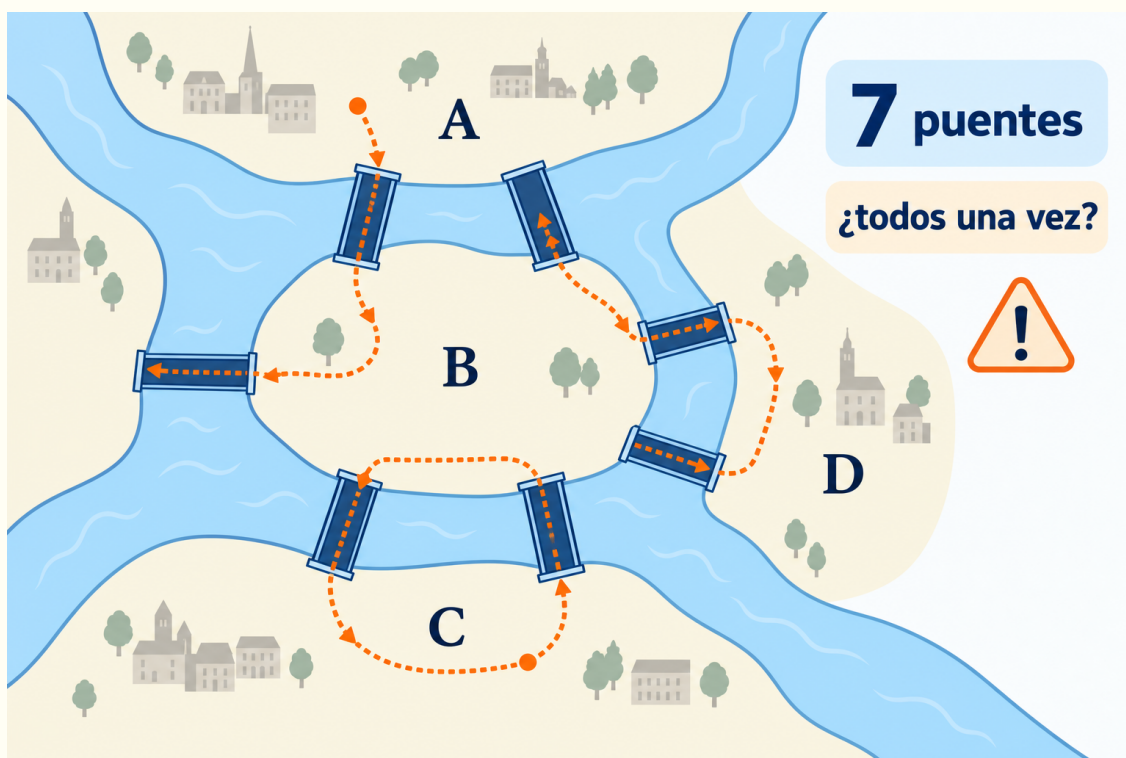
Teorema 1: Criterio de Euler

Sea G un grafo finito, no dirigido y conexo, ignorando los vértices aislados. Entonces:

- G tiene un circuito euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par
- G tiene un camino euleriano que no es circuito si y solo si exactamente dos vértices tienen grado impar.

Ejemplo 5: Königsberg: el problema que puso a los grafos en el mapa

El esquema representa las cuatro zonas de tierra y los siete puentes. Todos los vértices tienen grado impar. Por el criterio de Euler, no existe un paseo que cruce cada puente exactamente una vez



Euler no tuvo que probar todas las rutas posibles: contó grados y demostró que el paseo era imposible antes de ponerse las botas.

3.6. VISITAR CADA LUGAR UNA SOLA VEZ: CAMINOS HAMILTONIANOS

Los problemas de Euler se fijan en las aristas. En otros problemas lo importante es visitar cada vértice una sola vez. Es la diferencia entre pasar por todas las carreteras y entregar un paquete en cada ciudad sin repetir ciudad.

Problema inicial: La ruta del viajero

Una persona quiere visitar varias ciudades, volver a la ciudad inicial y no repetir ninguna parada. ¿Cómo se diferencia este objetivo de cruzar cada carretera exactamente una vez?

Definición

Un **camino hamiltoniano** visita todos los vértices exactamente una vez. Si termina en el vértice donde comenzó, tenemos un **ciclo hamiltoniano**.

Ejemplo 6: Euler y Hamilton no son gemelos

Un recorrido euleriano controla las aristas: cada calle debe aparecer una sola vez. Un recorrido hamiltoniano controla los vértices: cada ciudad debe visitarse una sola vez. Un grafo puede tener uno de los dos, los dos o ninguno.

Esta distinción aparece en logística, en la planificación de rutas y en la organización de visitas. Para decidir si existe una ruta hamiltoniana no tenemos un criterio tan sencillo como el de Euler, por lo que conviene experimentar con grafos pequeños y justificar cada paso.

3.7. ÁRBOLES: REDES SIN VUELTAS INÚTILES

Una red de ordenadores, un menú de carpetas o el organigrama de un instituto suelen tener una estructura ramificada. Los árboles son grafos conectados que no contienen ciclos: para llegar de un punto a otro no hay dos caminos alternativos escondidos.

Definición

Un **árbol** es un grafo no dirigido, conexo y sin ciclos. Un vértice de grado 1 se llama **hoja**.

Proposición 2: Propiedades básicas de los árboles

Si un árbol tiene n vértices, entonces tiene $n - 1$ aristas. Además, entre cada par de vértices existe un único camino. Si añadimos una arista nueva, aparece un ciclo; si eliminamos cualquier arista, el grafo deja de ser conexo.

Demostración

Podemos construir un árbol empezando con un vértice y añadiendo cada nuevo vértice unido por una única arista a la parte ya construida. Cada incorporación suma un vértice y una arista, así que al terminar con n vértices hemos usado $n - 1$ aristas.

Si hubiera dos caminos diferentes entre dos vértices, su unión contendría un ciclo. Por tanto, en un árbol el camino es único. Al añadir una arista, sus extremos ya estaban unidos por ese camino y se forma un ciclo; al quitar una arista de ese camino, los extremos quedan separados.

Ejemplo 7: Conectar el laboratorio sin cables de más

Queremos conectar seis ordenadores de un laboratorio de forma que todos tengan acceso a la red y no gastemos cable innecesario. Una red con estructura de árbol necesita exactamente cinco conexiones. Si añadimos una sexta, ganamos una ruta alternativa, pero aparece un ciclo.



Este ejemplo muestra una decisión habitual en redes: un árbol ahorra material, mientras que una conexión extra aporta redundancia. La matemática permite ver con claridad qué propiedad ganamos y cuál sacrificamos.

3.8. COLOREAR SIN QUE SE CHOQUEN LOS VECINOS

Colorear un grafo no significa sacar las ceras de primaria. Significa asignar etiquetas de modo que dos vértices adyacentes no reciban la misma. Las etiquetas pueden representar horarios, aulas, frecuencias de radio o días de examen.

Problema inicial: Un horario sin exámenes solapados

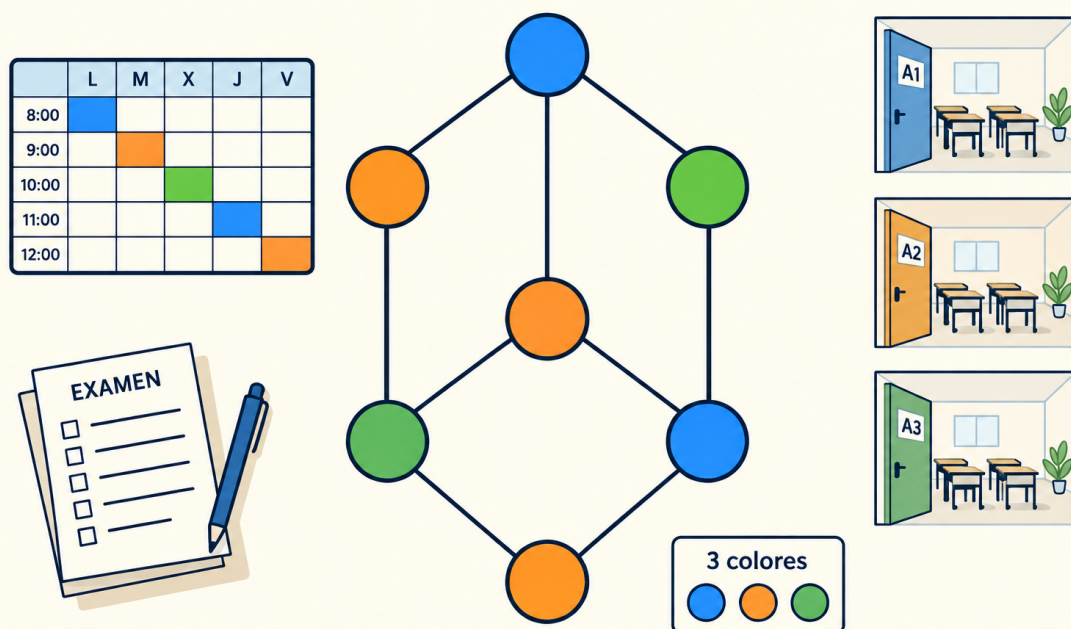
En una clase, dos asignaturas se unen si tienen alumnado en común. Dos asignaturas unidas no pueden celebrarse a la misma hora. ¿Cuántas franjas horarias necesitamos como mínimo?

Definición

Una **coloración propia** de un grafo asigna un color a cada vértice de modo que los vértices adyacentes tengan colores distintos. El menor número de colores que permite hacerlo se llama **número cromático** y se escribe $\chi(G)$.

Ejemplo 8: Tres colores para organizar una semana

En el esquema, cada círculo representa una asignatura y cada color una franja horaria. Las asignaturas unidas por una línea nunca comparten color.



Su número cromático entonces sería

$$\chi(G) = 3$$

La coloración sirve para fabricar un horario sin conflictos. La misma idea organiza canales de radio, turnos de trabajo o registros de memoria en un programa.

Propiedades

Al colorear podemos buscar una solución de forma ordenada:

1. Elegir un vértice con muchas conexiones
2. Asignarle el primer color disponible
3. Continuar con los vértices adyacentes, evitando los colores ya usados por sus vecinos
4. Comprobar si podemos reducir el número de colores

Este procedimiento voraz suele encontrar una coloración rápidamente, pero no siempre garantiza que use el mínimo número de colores. Esa diferencia entre encontrar una solución y demostrar que es la mejor será una de nuestras preguntas favoritas.

EJERCICIOS

Trabajo individual. Estos ejercicios recorren las ideas fundamentales de la teoría de grafos: representar una red, contar conexiones, buscar rutas, trabajar con pesos, recorrer aristas, visitar vértices y colorear sin conflictos. En cada problema escribe primero qué representan los vértices y las aristas. Un dibujo pequeño suele ahorrar muchas cuentas y bastante drama matemático.

Tiempo orientativo: dos sesiones de 50 minutos.

Ejercicio 1 — El mapa del IES Salmedina

Usa las abreviaturas A (Entrada A), B (Entrada B), P (Patio), T (Sala de tecnología), L (Biblioteca) y S (Sala de profesores). Las conexiones directas son

$$AP, BP, BS, PT, TL, LS$$

- Escribe la lista de vecinos de cada vértice
- Calcula el grado de cada zona y el número de aristas
- Construye la matriz de adyacencia en el orden A, B, P, T, L, S
- Comprueba el lema del apretón de manos.

Ejercicio 2 — Quién conecta con quién en Instagram

En una red de cuentas del instituto, una flecha $X \rightarrow Y$ significa que la cuenta X sigue a la cuenta Y . Las flechas son

$$S \rightarrow M, S \rightarrow C, M \rightarrow C, M \rightarrow R, C \rightarrow R, R \rightarrow C, U \rightarrow S, U \rightarrow M$$

donde S es @Salmedina, M es @MatesEn3Min, C es @CienciaJoven, R es @RobóticaSalmedina y U es @CulturaSalmedina

- Calcula el grado de entrada y el grado de salida de cada cuenta
- ¿Qué cuenta recibe más conexiones?
- Encuentra una cadena de seguimiento desde @Salmedina hasta @RobóticaSalmedina.

Ejercicio 3 — El grupo privado y el apretón de manos

En un grupo privado de una red social participan siete estudiantes. Sus grados de amistad son

$$3, 2, 4, 1, 2, 3, x$$

Se sabe que la red contiene exactamente 10 amistades

- Determina x
- Comprueba que la suma de grados coincide con el doble del número de amistades
- ¿Cuántos vértices de grado impar aparecen?

Ejercicio 4 — El paquete que debe llegar

Una empresa de reparto simplifica su mapa con siete centros A, B, C, D, E, F, G . Las conexiones son

$$AB, AC, BD, CD, DE, EF, FG$$

- Encuentra un camino de A a G con el menor número de aristas posible
- Identifica las aristas que son puentes
- ¿Qué componentes quedan si se cierra la conexión DE ?

Ejercicio 5 — La ruta más rápida de Amazon

Un repartidor utiliza el siguiente grafo ponderado. Los números indican minutos estimados:

Conexión	Tiempo
Almacén–A	2
Almacén–B	6
A – – C	5
B – – C	2
A – – D	7
C – – D	3
C – – Cliente	8
D – – Cliente	4

- Calcula el tiempo total de las rutas Almacén–A–D–Cliente y Almacén–A–C–D–Cliente
- Encuentra la ruta mínima desde el almacén hasta el cliente
- Escribe las etiquetas definitivas que asignaría Dijkstra a A, B, C, D y al cliente.

Ejercicio 6 — Un paseo euleriano por el laboratorio

Considera el grafo con aristas

$$AB, BC, CD, DA, AC, CE, EA$$

- Calcula todos los grados y decide si existe un circuito euleriano
- Escribe un circuito euleriano
- Elimina la arista EA . ¿Qué tipo de recorrido euleriano queda y entre qué vértices comienza y termina?

Ejercicio 7 — La ruta de las ciudades

Un servicio de transporte conecta seis ciudades A, B, C, D, E, F con las aristas

$$AB, BC, CD, DE, EF, FA, AD, BE, CF$$

- Escribe un ciclo hamiltoniano
- Calcula el grado de cada vértice
- ¿Puede existir un camino euleriano en este grafo? Justifica la respuesta.

Ejercicio 8 — Cableado sin vueltas

Una red de siete dispositivos tiene las conexiones

$$SA, SB, AC, AD, BE, EF$$

donde S es el servidor

- Justifica que el grafo es un árbol
- Encuentra el camino único de C a F
- ¿Qué ciclo aparece si añadimos la conexión DF ?

Ejercicio 9 — Un horario sin choques

Seis asignaturas se representan por M (Matemáticas), F (Física), Q (Química), I (Informática), B (Biología) y H (Historia). Dos asignaturas están unidas si tienen estudiantes en común. Las aristas son

$$MF, MQ, FQ, FI, QB, IB, BH$$

- Colorea el grafo usando tres colores
- Interpreta los colores como tres franjas horarias
- Justifica que no bastan dos colores.

Ejercicio 10 — Dos clics para llegar a una cuenta

En una red dirigida aparecen las cuentas S (@Salmedina), M (@MatesEn3Min), C (@CienciaJoven) y R (@RobóticaSalmedina). Sus conexiones son

$$S \rightarrow M, \quad S \rightarrow C, \quad M \rightarrow C, \quad M \rightarrow R, \quad C \rightarrow R, \quad R \rightarrow M$$

En el orden S, M, C, R , escribe la matriz de adyacencia A

- a) Calcula cuántos recorridos dirigidos de longitud 2 van desde S hasta R
- b) Calcula cuántos recorridos dirigidos de longitud 3 van desde S hasta M
- c) ¿Puede alcanzarse S desde alguna de las otras cuentas?

BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

Material docente de partida

- [1] VALLADARES HERRERA, F. J. (2026). *Desafíos matemáticos. Cuadernillo completo*. IES Salmedina. Apuntes docentes para 2.º de Bachillerato de ciencias; apartado «Teoría de Grafos» del capítulo «Introducción a la matemática discreta». Versión de septiembre de 2026, utilizada como material de partida de este tomo.