

CUADERNO DE TRABAJO · IES SALMEDINA

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

TOMO 4

Estrategias de problemas



2.º de Bachillerato · Ciencias

Teoría y ejercicios · Cuadernillo del alumnado

Francisco José Valladares Herrera

Curso 2026–2027

ÍNDICE GENERAL

4. Estrategias y técnicas para problemas	2
4.1. Experimentar antes que demostrar	3
4.1.1. Leer con intención y probar con orden	3
4.1.2. De una tabla a una explicación general	4
4.1.3. Buscar fallos también es avanzar	5
4.1.4. Resolver un problema a partir de otros más pequeños	5
4.2. Problemas con juegos	6
4.2.1. Entender las reglas y mirar desde el final	7
4.2.2. Cambiar una regla y revisar la estrategia	9
4.2.3. Simetría: responder haciendo de espejo	9
4.2.4. Invariantes: detectar lo que no puede cambiar	10
4.3. Principio del palomar	10
4.3.1. Más objetos que lugares disponibles	11
4.3.2. Cajas que no se ven a simple vista	12
4.3.3. Del recuento a una distancia	13
4.3.4. Un paso más: contar relaciones	14
4.4. Estrategias algebraicas	14
4.4.1. Traducir el texto y poner condiciones a las letras	15
4.4.2. Reconocer estructuras antes de desarrollar	16
4.4.3. Factorizar para encontrar todas las posibilidades	16
4.4.4. Completar cuadrados para justificar un máximo	17
4.4.5. Cambiar de variable para simplificar lo que se repite	18
4.4.6. No perder soluciones ni aceptar intrusas	19
4.5. Problemas mixtos de olimpiadas	20
Ejercicios	24
Bibliografía y webgrafía	28

TOMO 4

ESTRATEGIAS Y TÉCNICAS PARA PROBLEMAS

Lees un problema. Lo vuelves a leer. Miras el techo, por si allí aparece una pista. Nada. Bien: este capítulo empieza precisamente en ese momento. Resolver problemas también se aprende.

En los tres primeros tomos reunimos herramientas para contar, trabajar con restos y estudiar redes. Ahora vamos a practicar algo igual de importante: **decidir qué hacer cuando el enunciado no te dice qué herramienta utilizar**. Aprenderemos a comprender qué se pide, organizar la información, ensayar ideas y explicar por qué una solución funciona.

Buscaremos patrones, estrategias en juegos, coincidencias inevitables y relaciones algebraicas. Conviene avanzar con papel, lápiz y curiosidad. La inspiración puede llegar tarde; un primer intento puede empezar ya.

Nota

Un pequeño acuerdo. Explora cada problema inicial unos minutos antes de leer su resolución. Anota una prueba, una duda o un caso pequeño y después compara tu camino con el del ejemplo.

Si te atascas, completa esta frase: «*Sé que... he probado que... y me falta averiguar...*». Concretar la dificultad ayuda a buscar una salida.

4.1. EXPERIMENTAR ANTES QUE DEMOSTRAR

Problema inicial: Un mural de fotos que no para de crecer

Para una exposición del instituto empezamos con una foto cuadrada. En cada paso añadimos una columna a la derecha y una fila arriba para obtener un cuadrado con una foto más por lado. La esquina nueva se coloca una sola vez, que imprimirla dos veces no da puntos extra.

En los primeros pasos añadimos 1, 3, 5, 7, ... fotos, contando la foto inicial como el primer paso. ¿Cuántas habrá en total en el paso 20? Busca una explicación que sirva también para cualquier otro paso.

4.1.1. LEER CON INTENCIÓN Y PROBAR CON ORDEN

Antes de calcular, distingue **los datos**, **las condiciones** y **lo que se pide**. En el mural, el paso 20 no significa «añadir 20 fotos»: significa haber construido el vigésimo cuadrado. Una palabra mal interpretada puede cambiar el problema entero.

Propiedades

Estas preguntas ayudan a convertir un enunciado en una investigación:

1. **¿Qué debo entregar?** Un ejemplo, todos los casos, un número, una demostración o el mejor resultado posible.
2. **¿Qué está permitido?** Señala condiciones como «distintos», «enteros», «exactamente» o «como máximo».
3. **¿Qué caso pequeño puedo resolver?** Reduce el tamaño sin cambiar las reglas que importan.
4. **¿Cómo registro lo que ocurre?** Una tabla, un dibujo o una lista ordenada permiten comparar los intentos.
5. **¿Qué parece mantenerse?** Formula una idea precisa y busca tanto casos favorables como posibles fallos.

No necesitas adivinar el método a la primera. Cada intento debería dejarte alguna información que no tenías antes.

Definición

Una **conjetura** es una afirmación que sospechamos verdadera, pero que todavía no hemos demostrado.

Un **contraejemplo** es un caso que cumple las condiciones del enunciado y contradice una afirmación que se pretendía válida para todos esos casos.

Una **demostración** es un razonamiento que, a partir de las hipótesis y de resultados conocidos, justifica la afirmación en todos los casos que esta abarca.

4.1.2. DE UNA TABLA A UNA EXPLICACIÓN GENERAL

Ejemplo 1: El mural: contar por capas

Resolvamos el problema inicial siguiendo tres pasos.

- a) **Observamos.** Contamos las fotos nuevas y el total acumulado, que son cantidades diferentes.

Paso	1	2	3	4
Fotos nuevas	1	3	5	7
Fotos en total	1	4	9	16

La tabla sugiere que en el paso n hay n^2 fotos.

- b) **Explicamos la estructura.** Para pasar del cuadrado de lado $n - 1$ al de lado n , añadimos una columna de $n - 1$ fotos y una fila de n fotos. En total añadimos

$$(n - 1) + n = 2n - 1$$

Las capas encajan sin dejar huecos ni superponerse.

- c) **Concluimos.** Tras el paso n , las fotos forman exactamente n filas de n fotos. Por tanto, para todo entero $n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

En el paso 20 habrá 400 fotos; solo en ese último paso se habrán añadido 39.

Un cuadrado que crece por capas

Cada color nuevo añade una fila y una columna, sin repetir la esquina.



$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$$

En el paso n : $2n - 1$ fotos nuevas y n^2 fotos en total.

Qué conviene aprender. El dibujo de cuatro pasos ayuda a descubrir la idea; la descripción de cómo se construye cualquier paso es lo que justifica la fórmula general.

Nota

Probar muchos casos no equivale a demostrar. Una calculadora o una hoja de cálculo pueden producir una tabla enorme y seguir sin explicar qué ocurre después. Si el problema tiene un número finito de casos y los revisamos *todos* con un procedimiento

fiable, sí podemos obtener una demostración por casos. La diferencia está en «todos», no en lo impresionante que sea la tabla.

4.1.3. BUSCAR FALLOS TAMBIÉN ES AVANZAR

Ejemplo 2: La fórmula que se cree una fábrica de primos

En un vídeo aparece esta afirmación: «Para cualquier entero $n \geq 0$, el número $n^2 + n + 41$ es primo». Las primeras pruebas parecen darle la razón.

n	0	1	2	3
$n^2 + n + 41$	41	43	47	53

En lugar de seguir probando sin dirección, buscamos un valor que haga aparecer el factor 41. Si elegimos $n = 40$, obtenemos

$$40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$$

Este número no es primo. Por tanto, la afirmación es falsa.

El contraejemplo no dice que la fórmula nunca produzca primos: acaba de producir varios. Dice que no los produce **siempre**. Un solo fallo basta para desmontar ese «para cualquier».

Ejemplo 3: Dos números consecutivos: del ensayo al porqué

Al multiplicar dos enteros consecutivos obtenemos resultados como $2 \cdot 3 = 6$, $5 \cdot 6 = 30$ y $8 \cdot 9 = 72$. Conjeturamos que el producto siempre es par.

Para justificarlo, llamamos n al primero. Los números son n y $n + 1$. Si n es par, el producto tiene un factor par; si n es impar, $n + 1$ es par y ocurre lo mismo. Estas dos posibilidades abarcan a todos los enteros.

Por tanto, $n(n + 1)$ es par para cualquier entero n , incluidos el cero y los negativos. Hemos pasado de tres ejemplos concretos a un argumento que no depende de cuáles sean los números.

4.1.4. RESOLVER UN PROBLEMA A PARTIR DE OTROS MÁS PEQUEÑOS

Definición

Una **relación de recurrencia** expresa el resultado de un problema mediante resultados de casos más pequeños del mismo tipo. Necesita **casos iniciales** conocidos para poder empezar.

Ejemplo 4: El robot de la cámara y su último movimiento

Un robot que graba una exposición se mueve por una cuadrícula. Parte de $(0,0)$ y quiere llegar a $(3,2)$. En cada movimiento avanza una unidad hacia la derecha o una hacia arriba. No hay obstáculos ni se permiten otros movimientos. Contaremos sus rutas.

La pregunta útil es cómo puede terminar una ruta. Para llegar a $(3,2)$, el robot debe venir de $(2,2)$ o de $(3,1)$. Las dos opciones son distintas y ninguna ruta puede acabar de ambas maneras a la vez.

Si $R(a, b)$ es el número de rutas hasta (a, b) , para $a, b \geq 1$ tenemos

$$R(a, b) = R(a-1, b) + R(a, b-1)$$

Sobre cada eje solo hay una ruta: todo a la derecha o todo hacia arriba. Así, $R(a, 0) = R(0, b) = 1$, también en el origen, donde contamos la ruta sin movimientos.

Completamos la tabla sumando el valor de la izquierda y el de abajo.

	$a = 0$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$
$b = 2$	1	3	6	10
$b = 1$	1	2	3	4
$b = 0$	1	1	1	1

Hay 10 rutas. La regla funciona porque clasifica todas las llegadas posibles sin repetir ninguna. El robot no necesita inspiración: necesita recordar de dónde puede venir.

Nota

Consejo de profe. Cuando descubras un patrón, añade una frase que empiece por «Esto ocurre porque...». Si solo puedes responder «porque me sale en la tabla», todavía tienes una conjetura interesante y una explicación pendiente.

4.2. PROBLEMAS CON JUEGOS

Ganar una partida puede deberse a una buena decisión o a un despiste del rival. Encontrar una estrategia ganadora exige algo más: saber responder incluso cuando la otra persona juega lo mejor posible. Aquí el «es que tuve mala suerte» tendrá poco recorrido.

Problema inicial: La última ficha de batería

Un juego de mesa representa la batería de un robot mediante 21 fichas. Juegan dos personas por turnos. En cada turno se retiran 1, 2 o 3 fichas, sin retirar más de las que quedan. **Gana quien retira la última ficha.**

Si puedes decidir quién empieza, ¿qué eliges? Ensaya primero con montones pequeños y busca una regla que permita responder a cualquier jugada rival.

4.2.1. ENTENDER LAS REGLAS Y MIRAR DESDE EL FINAL

En esta sección estudiaremos juegos sin azar, con toda la información visible y con partidas que terminan tras un número finito de jugadas. Antes de investigar, hay que saber quién mueve, qué puede hacer y qué condición decide la victoria. Cambiar una sola regla puede cambiar por completo la respuesta.

Definición

Una **posición** describe el estado del juego y a quién le toca mover. Una **estrategia** indica qué jugada escoger en cada situación que pueda presentarse.

Una estrategia es **ganadora** si garantiza la victoria frente a cualquier respuesta legal del rival.

En un juego finito de dos personas, sin azar ni empates, una posición es **ganadora** para quien debe mover si dispone de una estrategia ganadora. Es **perdedora** si, frente a un rival que juega correctamente, no puede evitar la derrota.

Propiedades

Para los juegos en los que **pierde quien no puede mover**, podemos clasificar posiciones empezando por el final:

1. Una posición sin jugadas legales es perdedora.
2. Una posición es ganadora si existe alguna jugada que deja al rival en una posición perdedora.
3. Una posición es perdedora si todas sus jugadas dejan al rival en posiciones ganadoras.

Las palabras «existe alguna» y «todas» hacen trabajos diferentes: para ganar basta encontrar una buena opción; para demostrar que una posición es perdedora hay que descartar todas las opciones.

Ejemplo 5: Veintiuna fichas y una estrategia de cuatro

Volvemos al juego de la batería. Escribimos *P* para una posición perdedora y *G* para una ganadora, siempre desde el punto de vista de quien debe jugar.

Fichas restantes	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Tipo	<i>P</i>	<i>G</i>	<i>G</i>	<i>G</i>	<i>P</i>	<i>G</i>	<i>G</i>	<i>G</i>	<i>P</i>

Con 1, 2 o 3 fichas, las retiramos todas y ganamos. Con 4, cualquier jugada deja al rival entre 1 y 3, así que le entrega la victoria. Desde 5, 6 o 7 podemos dejar 4. Desde 8, todas las jugadas dejan una de esas posiciones ganadoras.

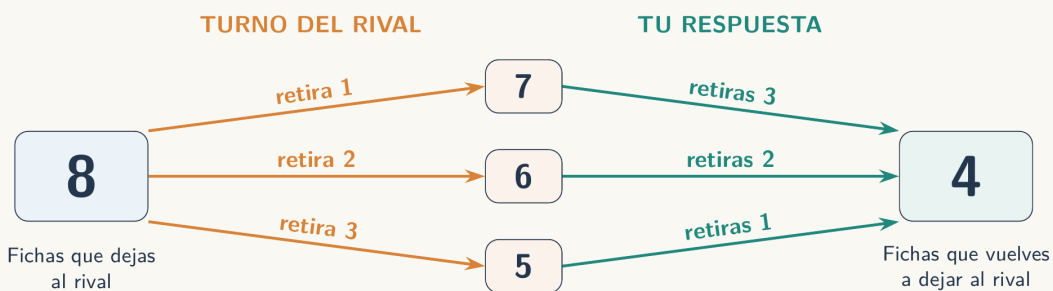
El patrón sugiere que conviene **dejar un múltiplo de 4 al rival**. Con 21 fichas, empezamos retirando una y dejamos 20. Después respondemos así:

El rival retira	1	2	3
Nosotros retiramos	3	2	1

Cada pareja de turnos retira exactamente 4 fichas. Tras nuestras jugadas quedan 20, 16, 12, 8, 4, 0, y retiramos la última.

Tres jugadas del rival. Una misma respuesta final.

Se retiran 1, 2 o 3 fichas por turno. Gana quien retira la última.



Cada pareja de turnos retira 4 fichas: $1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4$
La misma regla permite dejar 20, 16, 12, 8, 4, 0 fichas.

La imagen muestra las tres respuestas posibles cuando hemos dejado 8 fichas. No predice qué hará el rival: cubre todas sus opciones.

Proposición 1: Retirar entre una y m fichas

Sea $m \geq 1$ un entero. Dos personas retiran por turnos entre 1 y m fichas de un montón, sin superar las que quedan. Si gana quien retira la última, las posiciones perdedoras son exactamente aquellas cuyo número de fichas es múltiplo de $m+1$, incluido el cero.

Demostración

Desde un múltiplo positivo de $m+1$, retirar entre 1 y m fichas deja una cantidad que no es múltiplo de $m+1$.

Si, en cambio, quedan $q(m+1) + r$ fichas, con $1 \leq r \leq m$, podemos retirar r y dejar un múltiplo de $m+1$. Por tanto, siempre podemos responder a una retirada de k fichas retirando $m+1-k$.

Esta respuesta es legal: si el múltiplo anterior era positivo, había al menos $m+1$ fichas y, después de la jugada rival, quedan al menos $m+1-k$. Cada pareja de turnos reduce el montón en $m+1$ fichas hasta llegar a cero. Quien mantiene la estrategia retira las últimas. Así se justifican tanto las posiciones ganadoras como las perdedoras.

4.2.2. CAMBIAR UNA REGLA Y REVISAR LA ESTRATEGIA

Ejemplo 6: Mismas fichas, pero ahora la última quema

Volvemos a empezar con 21 fichas y se siguen retirando 1, 2 o 3 por turno, pero ahora **pierde quien retira la última**.

Con una ficha, quien debe jugar pierde. Con 2, 3 o 4, puede dejar una al rival y ganar. Con 5, cualquier jugada deja 2, 3 o 4, así que vuelve a ser una posición perdedora.

Las cantidades que conviene dejar son ahora

1, 5, 9, 13, 17, 21,...

Son las que dejan resto 1 al dividir entre 4. Con 21, elegimos jugar en segundo lugar: si el rival retira k , retiramos $4 - k$. Después de nuestros turnos quedan 17, 13, 9, 5, 1. Con esa última ficha, el rival está obligado a perder.

La respuesta siempre es legal antes de llegar a una ficha, porque al comienzo de cada pareja de turnos quedan al menos 5. La condición final ha cambiado y, con ella, las posiciones clave. Por eso leer la última frase del enunciado también cuenta como entrenamiento matemático.

4.2.3. SIMETRÍA: RESPONDER HACIENDO DE ESPEJO

Ejemplo 7: Dos montones de entradas y una respuesta espejo

Hay dos montones de fichas que representan entradas para un festival. Cada turno permite retirar cualquier cantidad positiva de **un solo montón**. Gana quien retira la última ficha.

- a) **Empezamos con 6 y 6.** Quien juega en segundo lugar puede copiar en el otro montón la retirada del rival. Si este quita dos de uno, quitamos dos del otro. La respuesta es legal porque, antes de cada jugada rival, los montones tienen el mismo tamaño.

Después de nuestra respuesta vuelven a ser iguales. Cuando el rival vacíe uno, vaciaremos el otro y retiraremos la última ficha. Por tanto, gana el segundo jugador si sigue esta estrategia.

- b) **Empezamos con 7 y 5.** Ahora quien empieza puede retirar dos del montón mayor y dejar 5 y 5. Desde entonces aplica la estrategia espejo y gana.

Qué conviene aprender. No basta decir «copio al rival»: hay que explicar por qué siempre podremos copiar y por qué eso nos garantiza la última jugada.

4.2.4. INVARIANTES: DETECTAR LO QUE NO PUEDE CAMBIAR

Definición

Un **invariante** es una cantidad o propiedad que se conserva tras cada movimiento permitido. Si el estado inicial y el objetivo tienen valores distintos de ese invariante, el objetivo es imposible de alcanzar mediante esos movimientos.

Ejemplo 8: El panel de luces que no se deja completar

Para decorar el escenario usamos una cuadrícula de 6×6 casillas, coloreada como un tablero de ajedrez. Quitamos la casilla de la esquina inferior izquierda y la de la superior derecha. Queremos cubrir lo que queda con piezas de 1×2 , horizontales o verticales, sin solapamientos ni huecos.

Quedan 34 casillas, así que el área permitiría usar 17 piezas. Pero tener área suficiente es solo una condición necesaria.

El tablero original tiene 18 casillas de cada color. Las dos esquinas retiradas son del mismo color; si las llamamos negras, quedan 16 negras y 18 blancas. Cada pieza cubre una casilla de cada color. Por tanto, al colocar piezas se conserva la diferencia

$$\text{Blancas sin cubrir} - \text{Negras sin cubrir} = 2$$

Una cobertura completa exigiría que esa diferencia fuera cero. Es imposible. Cambiar de orientación las piezas cien veces no arregla el desequilibrio; lo que faltaba era mirar el color.

Nota

Antes de anunciar «ya sé ganar». Comprueba tres cosas: tu respuesta funciona ante cualquier jugada rival, siempre está permitida y conduce al final que te interesa. En una partida, además, una cantidad que disminuye en cada turno, como el total de fichas, puede servir para justificar que el proceso termina.

4.3. PRINCIPIO DEL PALOMAR

Problema inicial: Ocho publicaciones y una semana muy corta

Ocho estudiantes van a publicar una foto cada uno en la cuenta de una exposición. Cada persona elige un único día de la misma semana para publicarla, de lunes a domingo.

¿Podemos asegurar que al menos dos publicaciones coincidirán en un día, sin saber qué ha elegido nadie? Intenta evitar esa coincidencia y observa en qué momento te quedas sin días.

Hay problemas en los que podemos demostrar que algo tiene que ocurrir sin saber exactamente dónde ocurrirá. No conocemos las elecciones de los ocho estudiantes, pero sí cuántas

personas eligen y cuántos días hay disponibles. Esa comparación ya contiene la respuesta.

4.3.1. MÁS OBJETOS QUE LUGARES DISPONIBLES

Teorema 1: Principio del palomar

Si distribuimos más de k objetos en k cajas, siendo $k \geq 1$, alguna caja contiene al menos dos objetos. Cada objeto debe asignarse a una única caja.

Demostración

Supongamos que ninguna caja contiene dos objetos. Entonces cada una contiene, como máximo, uno. Como hay k cajas, entre todas podrían contener como máximo k objetos.

Pero hemos distribuido más de k . Esto contradice la suposición inicial, así que alguna caja tiene al menos dos objetos.

Las cajas pueden ser días, restos al dividir, parejas de números o regiones de un dibujo. No tienen por qué tener tapa. Tampoco hace falta ninguna paloma real, lo cual facilita bastante la limpieza del aula.

Teorema 2: Versión general del principio del palomar

Si N objetos se distribuyen en $k \geq 1$ cajas, alguna caja contiene al menos

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

objetos. El símbolo $\lceil x \rceil$, llamado techo de x , representa el menor entero mayor o igual que x .

Demostración

Llamemos $q = \lceil N/k \rceil$. Si todas las cajas tuvieran menos de q objetos, cada una tendría como máximo $q - 1$, ya que no podemos tener una fracción de objeto. En total habría como máximo $k(q - 1)$ objetos.

Por la definición de q , se cumple $q - 1 < N/k$, de modo que

$$k(q - 1) < N$$

No cabrían los N objetos. Por tanto, alguna caja contiene al menos q . En particular, $kr + 1$ objetos en k cajas obligan a que alguna tenga al menos $r + 1$.

Ejemplo 9: Publicaciones: de una coincidencia a una garantía

- a) **Ocho fotos en siete días.** Las fotos son los objetos y los días son las cajas. Como $8 > 7$, algún día recibirá al menos dos publicaciones. No sabemos cuál, pero la coincidencia está garantizada.

b) **Veintidós fotos en siete días.** Algún día tendrá al menos cuatro, porque

$$\left\lceil \frac{22}{7} \right\rceil = 4$$

Si hubiera como máximo tres cada día, solo podríamos publicar 21. La garantía es «al menos cuatro», no «exactamente cuatro».

c) **Garantizar cinco en algún día.** Con 28 fotos podrían publicarse cuatro cada día, sin llegar a cinco. Con 29, eso ya es imposible. Por tanto, el mínimo número de fotos que fuerza cinco en un día es 29.

Para demostrar que un número es el mínimo, hemos hecho dos cosas: ver que funciona y mostrar que con uno menos todavía puede fallar.

Propiedades

La parte creativa suele consistir en elegir bien las cajas.

1. Identifica los objetos y cuenta cuántos hay.
2. Define categorías que incluyan a todos los objetos y asignen cada uno a una sola categoría.
3. Cuenta las categorías y compara ambas cantidades.
4. Explica qué significa, en el problema original, que dos objetos estén en la misma caja.

La última frase es esencial: encontrar una coincidencia solo sirve si es precisamente la coincidencia que necesitamos.

4.3.2. CAJAS QUE NO SE VEN A SIMPLE VISTA

Ejemplo 10: Duraciones de vídeos que comparten un resto

Seleccionamos ocho vídeos de duraciones distintas, medidas en segundos enteros. Demostraremos que hay dos cuya diferencia de duración es un múltiplo de 7.

Usamos siete cajas: una por cada resto posible al dividir entre 7. Sus etiquetas son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cada vídeo pertenece exactamente a una de esas siete cajas. Como tenemos ocho vídeos, dos duraciones, a y b , comparten resto.

Escribimos $a = 7u + r$ y $b = 7v + r$. Entonces

$$a - b = 7(u - v)$$

Así que la diferencia es múltiplo de 7. Además es distinta de cero porque las duraciones eran distintas. La aritmética modular del tomo 2 acaba de entrar por la puerta.

Ejemplo 11: Seis tarjetas que obligan a formar una pareja

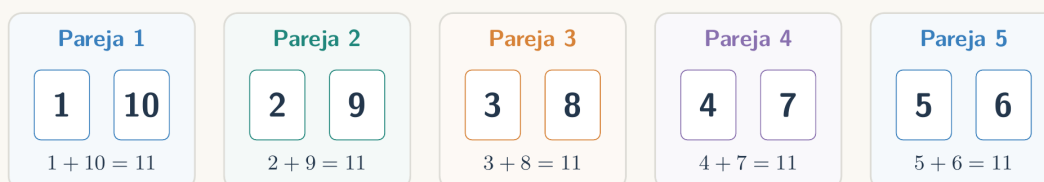
En un sorteo hay diez tarjetas numeradas del 1 al 10. Elegimos seis distintas. Demostraremos que entre ellas hay dos cuyos números suman 11.

Agrupamos las diez tarjetas en cinco cajas:

$$\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}$$

Diseña las cajas pensando en lo que quieres encontrar

Diez tarjetas, cinco parejas. Elegimos seis tarjetas distintas.



6 tarjetas elegidas > 5 parejas

Alguna pareja contiene dos tarjetas elegidas: sus números suman 11.

Las seis tarjetas elegidas se reparten entre esas cinco cajas. alguna caja debe contener dos de las elegidas. Como cada caja tiene exactamente los dos números que suman 11, encontramos la pareja buscada.

Con cinco tarjetas no se puede garantizar: podríamos elegir 1, 2, 3, 4, 5. Por tanto, seis es el mínimo que fuerza la pareja. **La estrategia ha sido diseñar las cajas a partir del resultado que queríamos conseguir.**

4.3.3. DEL RECuento A UNA DISTANCIA

Ejemplo 12: Cinco cámaras en un espacio para grabar

Colocamos cinco puntos en un cuadrado de lado 2 metros; cada punto representa la posición de una cámara. Demostraremos que dos están a una distancia no mayor que $\sqrt{2}$ metros.

Dividimos el cuadrado en cuatro cuadrados de lado 1. Para no contar dos veces los puntos situados en una división, asignamos los de la línea vertical central a la derecha y los de la horizontal central a la parte superior. El centro pertenece al cuadrado superior derecho.

Hay cinco puntos y cuatro regiones, así que dos puntos pertenecen a la misma región. Dentro de un cuadrado de lado 1, sus diferencias horizontal y vertical son como máximo 1. Por Pitágoras, su distancia d cumple

$$d^2 \leq 1^2 + 1^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad d \leq \sqrt{2}$$

El argumento garantiza la existencia de una pareja cercana. No determina cuál será ni

obliga a que su distancia sea exactamente $\sqrt{2}$.

4.3.4. UN PASO MÁS: CONTAR RELACIONES

Ejemplo 13: Ocho cuentas y dos números que tienen que coincidir

Ocho estudiantes comparan sus cuentas de una red social. Diremos que dos cuentas están **conectadas** si sus propietarios se siguen mutuamente. Contamos solo conexiones entre estas ocho cuentas, sin contar a una cuenta como conectada consigo misma.

Demostraremos que dos estudiantes tienen el mismo número de conexiones dentro del grupo. Ese número puede estar entre 0 y 7, lo que parece dar ocho cajas para ocho estudiantes. A primera vista no nos sobra nadie.

Pero las cajas 0 y 7 no pueden estar ocupadas a la vez: si alguien está conectado con las otras siete personas, nadie puede tener cero conexiones. Por tanto:

- a) Si alguien tiene cero conexiones, todos los números están entre 0 y 6.
- b) Si nadie tiene cero conexiones, todos los números están entre 1 y 7.

En ambos casos hay ocho estudiantes y solo siete valores posibles. Dos valores coinciden. Es una propiedad de los grados de un grafo simple no dirigido; por eso era importante exigir que el seguimiento fuera mutuo.

Nota

Consejo de profe. Cuando leas «demuestra que existen dos», pregúntate si puedes agrupar los objetos de una manera útil. Y distingue garantía de probabilidad: aquí no necesitamos que las elecciones sean al azar ni que las cajas sean igual de frecuentes.

4.4. ESTRATEGIAS ALGEBRAICAS

Las letras permiten escribir relaciones que sirven para muchos casos. La dificultad suele empezar antes de operar: elegir qué representa cada letra y traducir correctamente lo que nos cuentan. Una ecuación perfectamente resuelta puede contestar a una pregunta distinta si el planteamiento estaba mal.

Problema inicial: El altavoz compartido y las cuatro personas extra

Un grupo va a alquilar un equipo de sonido por 96 euros, a repartir en partes iguales. Si se apuntaran cuatro personas más, cada una pagaría 4 euros menos.

¿Cuántas personas había al principio? El precio total no cambia y todo el mundo paga la misma cantidad. Esta vez el problema no incluye al amigo que dice «mañana te hago la transferencia».

4.4.1. TRADUCIR EL TEXTO Y PONER CONDICIONES A LAS LETRAS

Definición

Modelizar algebraicamente consiste en representar los datos y las condiciones de una situación mediante variables, expresiones, ecuaciones o desigualdades.

El **dominio** de una variable indica qué valores puede tomar: por ejemplo, enteros positivos si cuenta personas, o reales positivos si representa una longitud.

Propiedades

Antes de resolver una ecuación, deja claras estas decisiones:

1. Escribe qué representa cada letra y en qué unidades.
2. Anota sus restricciones: positividad, valores enteros, denominadores distintos de cero o raíces definidas.
3. Traduce cada relación por separado. «Cuatro personas más» cambia el número de personas; «cuatro euros menos» cambia la aportación individual.
4. Al terminar, comprueba los resultados en el enunciado original y explica qué significan.

Una letra bien elegida puede ahorrarte varias ecuaciones.

Ejemplo 14: Repartir el alquiler sin perder de vista a las personas

- a) **Traducimos.** Sea n el número inicial de personas, con n entero positivo. Al principio cada una pagaría $96/n$ euros; con cuatro más, pagaría $96/(n+4)$. La diferencia de las aportaciones es 4.

$$\frac{96}{n} - \frac{96}{n+4} = 4$$

- b) **Resolvemos.** Como $n > 0$, podemos multiplicar por $n(n+4)$, que no es cero.

$$96(n+4) - 96n = 4n(n+4)$$

Simplificando y llevando todo al mismo miembro:

$$n^2 + 4n - 96 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (n-8)(n+12) = 0$$

Obtenemos $n = 8$ o $n = -12$. El segundo valor no puede representar un número de personas.

- c) **Comprobamos.** Había ocho personas: cada una pagaría 12 euros. Con doce personas, cada una pagaría 8 euros, exactamente cuatro menos.

La comprobación devuelve las letras a la situación que queríamos entender y confirma que la respuesta es coherente.

4.4.2. RECONOCER ESTRUCTURAS ANTES DE DESARROLLAR

En ocasiones no necesitamos conocer todas las incógnitas. Basta con encontrar una expresión que utilice los datos disponibles. Antes de abrir paréntesis, mira si reconoces alguna estructura.

Propiedades

Estas identidades son especialmente útiles para reorganizar información:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

Se pueden leer en ambos sentidos: desarrollar sirve para sumar términos; factorizar sirve para reconocer productos y restricciones.

Ejemplo 15: Dos clips y una identidad útil

Dos clips duran a y b segundos, con $a, b > 0$. Sabemos que sus duraciones suman 20 y que su producto es 96. Nos piden calcular $a^2 + b^2$.

La identidad del cuadrado de una suma conecta exactamente esas tres cantidades:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 20^2 - 2 \cdot 96 = 208$$

El resultado es 208 segundos cuadrados. Es una combinación matemática de las duraciones, no una nueva duración de vídeo. Si quisiéramos conocer los valores individuales, serían 8 y 12 segundos, pero no ha sido necesario encontrarlos.

Qué conviene aprender. Mira primero la expresión que te piden. A veces los datos encajan directamente en una identidad.

4.4.3. FACTORIZAR PARA ENCONTRAR TODAS LAS POSIBILIDADES

Si buscamos soluciones enteras y conseguimos transformar una ecuación en un producto igual a un número fijo, podemos estudiar los divisores de ese número. Así sustituimos un tanteo interminable por una lista finita que sí podemos revisar completa.

Ejemplo 16: El collage al que le falta una esquina

Un collage tiene x columnas e y filas de fotos, con x, y enteros positivos. Añadimos una fila de x fotos arriba y una columna de y fotos a la derecha. La esquina superior derecha queda vacía. En total hemos colocado 35 fotos. Buscamos todas las dimensiones posibles del bloque inicial.

El recuento nos da

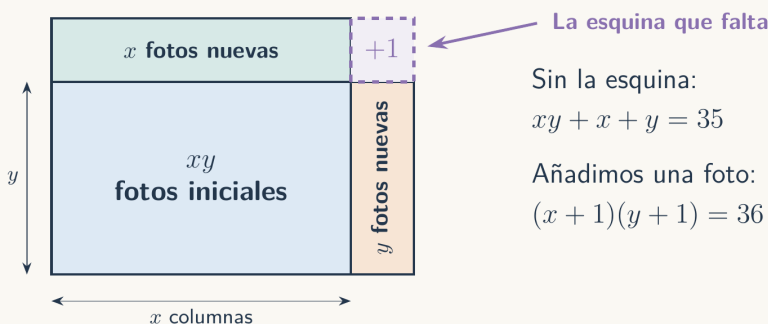
$$xy + x + y = 35$$

La imagen sugiere añadir la foto que falta en la esquina. Al hacerlo, obtenemos un rectángulo completo:

$$xy + x + y + 1 = 36 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1)(y+1) = 36$$

La esquina que convierte una suma en un producto

Cada unidad representa una foto. Esquema simbólico; no está a escala.



Sin la esquina:

$$xy + x + y = 35$$

Añadimos una foto:

$$(x+1)(y+1) = 36$$

Completar la figura ayuda a reconocer la factorización.

Como $x, y \geq 1$, ambos factores son enteros mayores o iguales que 2. Si primero buscamos los casos con $x \leq y$, las parejas posibles de factores son

$$(2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6)$$

Por tanto, los bloques iniciales tienen dimensiones

$$(x, y) = (1, 17), (2, 11), (3, 8), (5, 5)$$

También sirven las tres parejas con distinto orden: $(17, 1)$, $(11, 2)$ y $(8, 3)$. Son siete soluciones ordenadas, o cuatro formatos si consideramos iguales los que solo se diferencian en un giro.

No hemos omitido casos: hemos revisado todas las parejas de divisores positivos de 36 compatibles con $x, y \geq 1$. Una sola foto extra ha convertido una suma incómoda en un producto.

4.4.4. COMPLETAR CUADRADOS PARA JUSTIFICAR UN MÁXIMO

Proposición 2: Producto máximo con suma fija

Si x, y son reales no negativos y $x + y = s$, entonces

$$xy \leq \frac{s^2}{4}$$

La igualdad se alcanza si y solo si $x = y = s/2$.

Demostración

El cuadrado de cualquier número real es no negativo. Por tanto,

$$0 \leq (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = s^2 - 4xy$$

Despejando obtenemos $xy \leq s^2/4$. Para que haya igualdad, el cuadrado inicial debe ser cero, lo que equivale a $x = y$. Junto con $x + y = s$, eso obliga a que ambos valgan $s/2$.

Ejemplo 17: El espacio de baile que aprovecha toda la cinta

En una actividad del instituto delimitamos una zona rectangular con 40 metros de cinta para sus cuatro lados. Queremos que tenga la mayor superficie posible. Suponemos que no hay obstáculos y que las longitudes pueden ser cualesquiera reales positivos.

Si los lados miden x e y metros, $2x + 2y = 40$, luego $x + y = 20$. La superficie es $A = xy$. Sustituyendo $y = 20 - x$,

$$A = x(20 - x) = 100 - (x - 10)^2$$

Como el cuadrado es no negativo, $A \leq 100$. La cota se alcanza con $x = y = 10$, por lo que la zona óptima es un cuadrado de 10 metros de lado y 100 metros cuadrados de superficie.

Probar algunos rectángulos habría sugerido el resultado. El cuadrado que hemos res-tado demuestra que ninguno puede superarlo, y dar las dimensiones demuestra que el máximo sí puede alcanzarse.

4.4.5. CAMBIAR DE VARIABLE PARA SIMPLIFICAR LO QUE SE REPITE

Definición

Un **cambio de variable** consiste en dar un nombre nuevo a una expresión para transformar el problema en otro más sencillo. Hay que conservar sus restricciones y, al terminar, recuperar los valores de las variables originales.

Ejemplo 18: Una ecuación que esconde la misma expresión

Buscamos los números reales $x > 0$ que cumplen

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Observamos que esos términos aparecen al elevar $x + 1/x$ al cuadrado. Hacemos el cambio $t = x + 1/x$. Como $x > 0$, también $t > 0$.

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$$

Así, $t = 3$; descartamos $t = -3$ por la condición $t > 0$. Ahora volvemos a x :

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

Las soluciones son

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Ambas son positivas y cumplen $x + 1/x = 3$. Al elevar esta igualdad al cuadrado recuperamos $x^2 + 1/x^2 = 7$, de modo que las dos satisfacen la ecuación original.

4.4.6. NO PERDER SOLUCIONES NI ACEPTAR INTRUSAS

Ejemplo 19: Dos atajos que necesitan una revisión

a) **Dividir por algo que podría ser cero.** Consideremos

$$x(x - 3) = 2(x - 3)$$

Si dividimos directamente por $x - 3$, obtenemos $x = 2$, pero hemos supuesto sin avisar que $x \neq 3$. Factorizando se ve todo:

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = 2$, y ambas cumplen la ecuación inicial. Si optamos por dividir, primero hay que estudiar por separado el caso $x = 3$.

b) **Elevar al cuadrado puede añadir candidatos.** En la ecuación

$$\sqrt{x + 2} = x$$

la raíz está definida para $x \geq -2$, y su valor no negativo obliga además a que $x \geq 0$. Al elevar al cuadrado obtenemos

$$x + 2 = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 2)(x + 1) = 0$$

Los candidatos son 2 y -1 . El segundo no cumple $x \geq 0$ ni la ecuación original. La única solución es $x = 2$, pues $\sqrt{4} = 2$.

Una transformación puede ser útil sin ser reversible en todos los casos. Las condiciones y la comprobación forman parte de la resolución, aunque la calculadora tenga mucha confianza.

Nota

Consejo de profe. Antes de llenar media página de cuentas, pregúntate: «¿Me conviene factorizar, completar un cuadrado o dar otro nombre a una expresión?». Y al terminar, escribe una frase con la respuesta a la pregunta original. Un valor de x sin interpretar puede dejar la historia a medias.

4.5. PROBLEMAS MIXTOS DE OLIMPIADAS

Lees el enunciado. Lo vuelves a leer. Miras el papel y el papel te mira a ti. Mientras tanto, alguien ya ha escrito tres líneas y tu cerebro propone una estrategia muy concreta: merendar. Si te ha pasado algo parecido, bienvenido o bienvenida: **no ver la solución al principio forma parte de resolver problemas**. Un problema de olimpiada está pensado para que tengas que buscar el camino, no para que reconozcas una fórmula y la apliques en modo automático.

Hasta aquí hemos entrenado herramientas por separado. Ahora mezclaremos experimentación, juegos, invariantes, recuentos y álgebra. El enunciado no llevará un cartel que diga «se resuelve con el apartado 4.3». Nuestra primera tarea será decidir qué herramienta puede ayudarnos.

Propiedades

Un guion para empezar, incluso cuando no sabes empezar.

1. **Traduce la pregunta.** Escribe con tus palabras qué datos tienes, qué está permitido y qué debes demostrar. No es lo mismo encontrar un ejemplo que describir todos los casos.
2. **Haz pequeño el problema.** Cambia mil fichas por cuatro, dibuja un esquema o prepara una tabla. Anota también los intentos que fallan: pueden señalar una condición importante.
3. **Busca una estructura.** Pregúntate qué cambia y qué permanece igual. Si hay turnos, estudia el final de la partida; si hay muchos objetos y pocas categorías, piensa en el palomar; si aparecen productos y sumas, prueba a reorganizarlos.
4. **Intenta desmontar tu idea.** Busca un contraejemplo pequeño o una respuesta incómoda del rival. Diez partidas ganadas sugieren una estrategia; todavía no demuestran que funcione siempre.
5. **Escribe por qué funciona.** Justifica todos los casos, comprueba las restricciones y responde a la pregunta inicial. Si solo has resuelto una parte, distingue lo demostrado de lo que aún es una conjetura.

Nota

Cuando aparezca el «no sé hacerlo». Para un momento, respira con calma y cambia esa frase por una tarea pequeña: «Voy a entender una jugada» o «Voy a probar el caso de cuatro fichas». No necesitas tener la solución completa para dar el siguiente paso.

Si llevas varios minutos repitiendo las mismas cuentas, cambia de representación o deja escrita una pregunta concreta para retomarla. En clase puedes pedir una pista sobre ese atasco. El ritmo de quien se sienta a tu lado no mide lo que tú puedes aprender. Y una solución publicada suele mostrar el camino ya limpio: no vemos los tachones que costó encontrarlo. Aquí también se aprende tachando con fundamento.

Dos visitas a la olimpiada. Los siguientes problemas proceden de materiales de fase local

difundidos por Preparamates y por la Universidad de Cádiz. Conservamos sus reglas y desarrollamos la explicación paso a paso. El primero es un juego de transformación, sin adversario; el segundo exige responder a otra persona. En ambos, experimentar ayuda a descubrir una idea que después habrá que justificar.

Ejemplo 20: Una pizarra que quiere ponerse de acuerdo

Adaptación didáctica del problema 2 de la fase local de la OME de 2023, recogido en Preparamates.

En una pizarra aparecen $1, 2, \dots, n$, con $n \geq 3$. Una jugada consiste en elegir dos entradas distintas y aumentar ambas en el mismo entero positivo. Podemos repetir jugadas y elegir un incremento diferente cada vez. Queremos saber para qué valores de n podemos conseguir que todas las entradas sean iguales. «Distintas» se refiere a sus posiciones: se pueden elegir dos entradas que ya tengan el mismo valor.

- a) **Probamos antes de sacar conclusiones.** Con tres entradas funciona: primero aumentamos en 1 la primera y la tercera, y después en 2 la primera y la segunda.

$$(1, 2, 3) \longrightarrow (2, 2, 4) \longrightarrow (4, 4, 4)$$

Con cuatro también: aumentamos en 1 las entradas que valen 1 y 3, y después en 2 las dos que valen 2.

$$(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (2, 2, 4, 4) \longrightarrow (4, 4, 4, 4)$$

Dos éxitos animan, pero no autorizan a escribir «siempre».

- b) **Buscamos un obstáculo.** Cada jugada aumenta la suma total en $2k$, donde k es el incremento elegido. Por tanto, **la paridad de la suma no cambia**. Con seis entradas, la suma inicial es 21, impar; si todas terminaran valiendo M , su suma sería $6M$, par. Imposible. La pizarra no se arregla insistiendo más fuerte.

La misma dificultad aparece cuando $n = 4q + 2$. En efecto,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = (2q+1)(4q+3)$$

Esta suma es impar, mientras que nM sería par. Hemos demostrado una imposibilidad, pero aún debemos construir una solución para los demás valores.

- c) **Si n es múltiplo de cuatro, fabricamos parejas.** Agrupamos las entradas impares en parejas: $(1, 3)$, $(5, 7)$, y así sucesivamente. Hay un número par de impares, de modo que ninguno queda suelto. Aumentamos en 1 las dos entradas de cada pareja. Entonces cada valor par $2, 4, \dots, n$ aparece exactamente dos veces.

Para cada pareja de valor $v < n$, sumamos $n - v$ a sus dos entradas. La pareja que ya vale n se deja quieta. Todas terminan valiendo n , con jugadas permitidas.

- d) **Si n es impar, usamos una entrada de apoyo.** Señalamos la entrada que inicialmente contiene n . Para cada impar $1, 3, \dots, n - 2$, hacemos una jugada: aumentamos en 1 esa entrada impar y la entrada señalada. Así, las otras entradas quedan

emparejadas: $2, 2, 4, 4, \dots, n-1, n-1$. La señalada recibe $(n-1)/2$ incrementos y acaba valiendo

$$T = n + \frac{n-1}{2}$$

Como $T > n-1$, podemos elevar cada pareja de valor v hasta T , sumando $T-v$ a sus dos entradas. Ahora todas coinciden, incluida la señalada.

La clasificación completa, para $n \geq 3$, es

Es posible si y solo si $n \not\equiv 2 \pmod{4}$

Qué hemos aprendido. Un invariante puede descartar casos; los casos que sobreviven necesitan una construcción. «No encuentro un impedimento» no equivale a «ya he demostrado que se puede».

Ejemplo 21: Banderitas: una defensa que aguanta cualquier ataque

Versión didáctica del problema de las 4030 banderitas, incluido en el archivo de resoluciones de 2015 de la UCA.

Un polígono regular tiene 4030 vértices inicialmente vacíos. En cada turno, quien juega elige dos vértices libres y coloca una bandera roja en uno y una blanca en el otro. A y B se alternan hasta llenar el polígono. A quiere que al final haya tres vértices consecutivos con banderas del mismo color; B quiere impedirlo. El último vértice y el primero también son consecutivos. Demostraremos que B puede garantizar su objetivo, empiece quien empiece.

- a) **Reducimos el dibujo.** Empezamos con ocho vértices, numerados alrededor del polígono, y fijamos estas parejas:

$$(1, 2), \quad (3, 4), \quad (5, 6), \quad (7, 8)$$

Cada grupo de tres vértices consecutivos contiene una pareja completa, también si pasa del 8 al 1. Por ejemplo, 8, 1, 2 contiene la pareja (1, 2). Si cada pareja acaba con colores distintos, ningún trío puede tener un único color. Ya tenemos una defensa más concreta que «ir vigilando para que no pase nada».

- b) **Fijamos lo que B quiere conservar.** En el polígono original usamos las parejas

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (4029, 4030)$$

B quiere dejar, después de cada uno de sus turnos, cada pareja completamente vacía o completa con colores distintos. Al principio todas están vacías. Si empieza B, coloca sus dos banderas en una misma pareja y cumple esa condición.

- c) **Respondemos a todas las opciones de A.** Cuando A recibe el turno, solo puede usar vértices de parejas vacías. Hay dos situaciones:
- Si A ocupa una pareja completa, sus colores ya son distintos. B ocupa otra pareja vacía con sus dos colores, siempre que queden vértices libres.

- Si A toca dos parejas diferentes, B completa ambas colocando en cada una el color contrario al que puso A. Por ejemplo, si A pone blanca en 1 y roja en 6, B pone roja en 2 y blanca en 5.

En el segundo caso, B coloca exactamente una roja y una blanca, en dos vértices libres. Su respuesta es legal y recupera la condición que quería conservar.

- d) **Comprobamos también el final.** Si A llena los dos últimos vértices, estos pertenecen a la única pareja que quedaba vacía, así que recibe dos colores distintos. Si B realiza la última jugada, deja todas las parejas completas con colores distintos por su propia estrategia. En ambos casos, cualquier trío consecutivo contiene una pareja de colores distintos. Por tanto, B consigue su objetivo.

Qué hemos aprendido. Una estrategia ganadora debe explicar qué hacer ante cualquier respuesta del rival y por qué siempre se puede hacer. Aquí la clave es emparejar y conservar una condición, no dibujar 4030 vértices hasta que se acabe el bolígrafo.

Nota

Consejo de profe. Cuando leas una solución, tápala y contesta: «¿Qué observación abrió el camino? ¿Qué casos hubo que comprobar?». Después intenta contar la idea sin repetir sus frases. Comprender una solución es poder reconstruirla, aunque tu explicación tenga otros dibujos, otras letras y algún tachón más.

EJERCICIOS

Aquí toca elegir herramientas: probar, organizar, buscar un invariante, mirar desde el final o poner letras donde antes había un pequeño lío. No todos los problemas necesitan la misma llave.

Cómo trabajar. Antes de calcular, escribe qué buscas y qué condiciones debes respetar. Al terminar, añade una frase que explique por qué tu respuesta funciona. Los primeros ejercicios son de entrada; los últimos requieren combinar ideas. Distribuiremos esta práctica en varias sesiones: esto es un entrenamiento, no una carrera de obstáculos con cronómetro y música dramática.

Ejercicio 1 — Una mesa más, pero no cuatro sillas más

Para una merienda solidaria colocamos mesas cuadradas en una única fila recta. En cada lado libre cabe una persona; en los lados donde dos mesas se tocan no puede sentarse nadie. Tampoco se ocupan las esquinas: bastante tenemos con compartir las patatas.

- a) Dibuja los casos de 1, 2, 3 y 4 mesas y anota cuántas personas caben.
- b) Propón una fórmula para n mesas y justifícala contando los lados libres, no solo mirando la tabla.
- c) Determina el menor número de mesas necesario para sentar a 28 personas.

Ejercicio 2 — El descuento que no vuelve por donde vino

En un vídeo alguien afirma: «Si una tienda rebaja un precio un 20 % y después lo sube un 20 %, vuelve al precio inicial». La seguridad con la que lo dice es impresionante. La cuenta, ya veremos.

- a) Comprueba la afirmación con unas zapatillas de 100 euros. ¿Basta ese resultado para refutar lo que afirma el vídeo?
- b) Sea $P > 0$ el precio inicial y sea p un porcentaje con $0 < p < 100$. Expresa el precio después de una rebaja del p % seguida de una subida del p %, aplicada al precio rebajado. Decide si queda por debajo, por encima o igual que al principio.

Ejercicio 3 — El estudio de grabación está muy solicitado

Para grabar los podcasts de una jornada del instituto se ofrecen seis franjas horarias. Cada equipo solicita exactamente una franja y pueden coincidir tantas solicitudes como sea necesario.

- Llegan 41 solicitudes. ¿Cuál es el mayor número de solicitudes que puedes asegurar que tendrá, como mínimo, alguna franja? Justifica que no puedes garantizar una más.
- ¿Cuántas solicitudes hacen falta, como mínimo, para garantizar que alguna franja reciba al menos nueve? Explica también por qué una solicitud menos no basta.

Ejercicio 4 — Un reel con solo dos piezas

Un editor muy sencillo construye una animación con dos piezas: A , que dura un segundo, y B , que dura dos segundos. Puedes repetirlas y colocarlas en cualquier orden, sin solapamientos ni pausas. Dos montajes son distintos si cambia la secuencia de letras; por ejemplo, AB y BA cuentan por separado.

- Organiza una tabla con el número $F(n)$ de montajes de duración exacta n , para $n = 1, 2, \dots, 6$. Considera $F(0) = 1$: hay una única secuencia vacía.
- ¿Cuántos montajes duran exactamente ocho segundos? Justifica una relación entre $F(n)$, $F(n-1)$ y $F(n-2)$, distinguiendo cómo termina el montaje.

Ejercicio 5 — Llegar al 36: lee la letra pequeña

Dos personas juegan con un contador que empieza en 0. En cada turno hay que sumar 1, 2, 3 o 4, sin superar 36. No se puede pasar.

- Gana quien llega a 36. ¿Prefieres empezar o jugar en segundo lugar? Da una estrategia que funcione frente a cualquier respuesta legal del rival.
- Ahora pierde quien llega a 36. ¿Mantienes tu elección? Explica cómo cambia tu estrategia. Leer las reglas también es una habilidad matemática; aquí sale especialmente rentable.

Ejercicio 6 — Las galletas y el poder del espejo

Hay dos bandejas con 8 y 5 galletas. En cada turno se retira una cantidad positiva de una sola bandeja, hasta vaciarla si se desea. Gana quien retira la última galleta. Para las pruebas podéis usar tapones: las galletas reales tienen tendencia a desaparecer fuera de turno.

- Encuentra una primera jugada ganadora y explica cómo responderías después a cualquier jugada rival.
- Si se empieza con 6 galletas en cada bandeja, ¿quién puede garantizar la victoria? Justifica que sus respuestas siempre serán legales.

Ejercicio 7 — Un panel LED bastante cabezota

Un panel tiene 4×4 luces, inicialmente apagadas. Cada pulsación cambia el estado de exactamente dos luces que comparten un lado: las encendidas se apagan y las apagadas se encienden. Se permite repetir una pulsación.

- ¿Es posible acabar con exactamente cinco luces encendidas? Busca algo que se conserve en todas las pulsaciones.
- ¿Y con solo las cuatro esquinas encendidas? Si es posible, describe una secuencia concreta. Que un objetivo no esté descartado por tu invariante todavía no demuestra que se pueda alcanzar.

Ejercicio 8 — Pixel art con cuentas de colores

Para un mercadillo se preparan dos dibujos cuadrados con cuentas de colores: uno tiene a cuentas por lado y otro b , con $a > b \geq 1$ enteros. Ambos cuadrados están completamente rellenos y el mayor contiene exactamente 45 cuentas más que el menor.

- Encuentra todas las parejas posibles (a, b) . Organiza la búsqueda para poder asegurar que no falta ninguna.
- Elige la pareja que gastaría el menor número total de cuentas e indica cuántas necesitarías.

Ejercicio 9 — Un huerto con pared de regalo

En un proyecto de huerto urbano se delimita una zona rectangular contra una pared recta. La pared cierra un lado y disponemos de 24 metros de valla para los otros tres. La pared es suficientemente larga; se usa toda la valla y no hay que descontar ninguna puerta.

- Llama x a cada lado perpendicular a la pared. Expresa el otro lado y el área en función de x . ¿Qué valores de x tienen sentido?
- Encuentra las dimensiones que dan el área máxima y demuestra que ninguna otra elección mejora el resultado, sin usar derivadas.

Ejercicio 10 — Un filtro de formatos con un pequeño fallo

En un taller de edición programamos un filtro experimental. Si un vídeo tiene anchura $w > 0$ y altura $h > 0$, llamamos $r = w/h$ a su proporción. El filtro acepta los formatos que cumplen

$$r^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{17}{4}$$

Un compañero propone: «Entonces $r + 1/r = \sqrt{17}/2$, y listo». La frase y *listo* merece una revisión.

- Localiza el error y encuentra todos los valores positivos de r que acepta el filtro, mediante un cambio de variable.
- Si además exigimos formato horizontal, $w > h$, ¿cuál se conserva? Da unas dimensiones posibles en píxeles y comprueba la condición inicial.

BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

Material docente de partida

- [1] VALLADARES HERRERA, F. J. (2026). *Desafíos matemáticos. Cuadernillo completo*. IES Salmedina. Apuntes docentes para 2.º de Bachillerato de ciencias; del capítulo «Estrategias y técnicas para problemas». Versión de septiembre de 2026, utilizada como material de partida de este tomo.