

CUADERNO DE TRABAJO · IES SALMEDINA

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

TOMO 5

Problemas reales e históricos



2.º de Bachillerato · Ciencias

Teoría y ejercicios · Cuadernillo del alumnado

Francisco José Valladares Herrera

Curso 2026–2027

ÍNDICE GENERAL

5. Problemas reales e históricos	2
5.1. Grecia: medir, construir y demostrar	3
5.1.1. Medir no basta para demostrar	3
5.1.2. Medir la Tierra desde el suelo	4
5.1.3. Una pregunta que nos acompañará hasta Riemann	5
5.2. De la escritura de los números al álgebra	6
5.2.1. Antes de resolver, necesitamos escribir	6
5.2.2. Completar un cuadrado antes de memorizar una fórmula	6
5.2.3. Cuando una cuenta pide números que aún no entendemos	7
5.3. Unir geometría y álgebra	8
5.4. El azar y el cambio: nuevas formas de predecir	9
5.4.1. Una partida interrumpida puede iniciar una teoría	10
5.4.2. Una velocidad no es solo una distancia dividida por un tiempo	11
5.5. Euler : de las figuras a las redes	13
5.6. Los límites de las herramientas	14
5.6.1. Una respuesta negativa también puede ser una conquista	14
5.6.2. También podemos revisar el espacio donde trabajamos	16
5.7. Del infinito a las máquinas	16
5.7.1. No todos los infinitos tienen el mismo tamaño	17
5.7.2. Un límite que no se arregla comprando más memoria	18
5.7.3. Encontrar y comprobar: la pregunta P frente a NP	18
5.8. Primos, conjeturas y problemas del milenio	19
5.8.1. Primero, contar; después, predecir	20
5.8.2. Euler conecta una suma con todos los primos	21
5.8.3. Riemann cambia el lugar desde el que mirar	21
5.8.4. Qué cambiaría una solución	23
5.8.5. Un problema que sí cambió de columna: Fermat	24
5.8.6. Los siete problemas del milenio	24
5.8.7. Lo abierto, lo imposible y lo demostrado	25
Ejercicios	27
Bibliografía y webgrafía	31

TOMO 5

PROBLEMAS REALES E HISTÓRICOS

Imagina que alguien te entrega una regla sin marcas, un compás y un problema que lleva dos mil años dando guerra. No hay calculadora. Tampoco un vídeo de «resuelto en treinta segundos». Solo tienes unas herramientas, unas ideas y la sospecha de que debe existir un camino.

Las matemáticas han crecido así: midiendo terrenos, repartiendo bienes, siguiendo los astros, estudiando juegos y haciéndose preguntas que al principio parecían tener poca utilidad. A veces apareció una solución. Otras veces hubo que inventar nuevos números o cambiar la pregunta. Y en ocasiones el gran avance consistió en demostrar que, con ciertas reglas, lo que se buscaba era imposible.



Una evocación de nuestro viaje: cambian los instrumentos, pero seguimos necesitando observar, discutir y justificar.

Nota

Nuestro pacto con la máquina del tiempo. Antes de leer cada ejemplo, dedica unos minutos a su problema inicial con las herramientas indicadas. Es una exploración guiada, sin entregar un reto ni competir por terminar primero.

Usaremos letras y símbolos actuales para que las explicaciones se entiendan, y avisaremos cuando el método sea una reconstrucción didáctica. No vamos a fingir que **al-Juarismi** escribía con nuestro editor de ecuaciones: bastante tenía con que sus manuscritos llegaran enteros.

El recorrido empieza en Grecia, pero las matemáticas no empezaron allí. Egipto y Mesopotamia ya tenían procedimientos de cálculo y medida; China, India y el mundo islámico desarrollaron y transmitieron ideas fundamentales. Las ramas que hoy estudiamos no nacieron en fila ni de la mano de una única persona. Este capítulo sigue algunos problemas que permiten ver sus conexiones.

Propiedades

Tres preguntas para acompañar todo el viaje.

1. **¿Qué necesidad o curiosidad puso en marcha el problema?** Medir, repartir, predecir, demostrar o entender una estructura.
2. **¿Qué herramientas había y qué les faltaba?** A veces el obstáculo estaba en el lenguaje o en las reglas.
3. **¿Qué sabemos hoy?** Distinguiremos una solución, una imposibilidad demostrada y una pregunta que sigue abierta.

5.1. GRECIA: MEDIR, CONSTRUIR Y DEMOSTRAR

Época y herramientas. Nos situamos en la matemática griega antigua: dibujos, proporciones, regla sin marcas, compás y argumentos lógicos. Para medir sombras añadiremos un palo vertical y un instrumento para medir ángulos. La batería de todo esto dura bastante.

Problema inicial: La diagonal que no cabe en una fracción

Tienes un mosaico cuadrado de lado una unidad. Quieres conocer exactamente la longitud de su diagonal. El teorema de **Pitágoras** te dice que su cuadrado vale 2. Busca una fracción que dé esa longitud y distingue entre acercarte mucho y acertar exactamente.

5.1.1. MEDIR NO BASTA PARA DEMOSTRAR

La geometría griega desarrolló una forma sistemática de deducir resultados a partir de otros. Los *Elementos* de **Euclides**, compuestos hacia el año 300 a. C., son un gran ejemplo de esa organización. La pregunta ya no era solo «¿cuánto mide?», sino «¿por qué tiene que medir eso?».

Definición

Dos longitudes son **commensurables** si existe una longitud que cabe un número entero de veces en ambas. Su razón es entonces un número racional. Si no existe esa unidad común, son **incommensurables**.

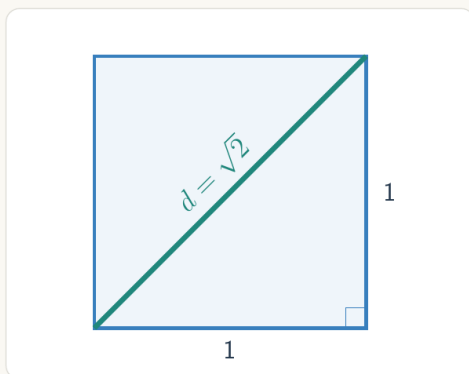
Ejemplo 1: Un cuadrado muy pequeño y una sorpresa muy grande

La diagonal d de nuestro cuadrado cumple

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

La diagonal que amplió nuestros números

GEOMETRÍA / Una construcción exacta puede superar a las fracciones.



Una longitud exacta

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

1,4142 es una aproximación.

Ninguna fracción es exactamente $\sqrt{2}$.

La diagonal se construye con regla y compás; su longitud es irracional.

Una medida decimal proporciona aproximaciones, como 1,41 o 1,4142. Para saber si alguna fracción es exacta, necesitamos un argumento que abarque todas las fracciones.

Supongamos que $d = p/q$, con p, q enteros positivos y sin factores comunes. Entonces

$$p^2 = 2q^2$$

El cuadrado de un impar es impar, así que p debe ser par. Escribimos $p = 2k$ y sustituimos:

$$4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

Por el mismo razonamiento, q también es par. Pero entonces p y q tienen el factor común 2, en contra de nuestra elección. Por tanto, $\sqrt{2}$ no es racional.

La idea que cambia el panorama. La diagonal existe y se construye sin dificultad, aunque ninguna fracción la exprese exactamente. La regla no ha fallado: nuestra colección de números era demasiado pequeña. Esta prueba utiliza lenguaje algebraico actual para explicar una dificultad conocida en la Antigüedad.

5.1.2. MEDIR LA TIERRA DESDE EL SUELO

En el siglo III a. C., **Eratóstenes** relacionó sombras y distancias para estimar la circunferencia terrestre. No necesitó dar una vuelta al planeta: necesitó conectar una observación local con un modelo geométrico. El método se conoce por testimonios antiguos posteriores a su obra.

Problema inicial: Un planeta que no entra en la cinta métrica

En un modelo ideal, dos ciudades están sobre el mismo meridiano. Al mediodía de un mismo día, el Sol está justo sobre la vertical de una ciudad; en la otra, sus rayos forman $7,2^\circ$ con la vertical. La distancia entre ambas, medida sobre ese meridiano, es 800 km. Usa rayos solares paralelos y una Tierra esférica para estimar su circunferencia. Los

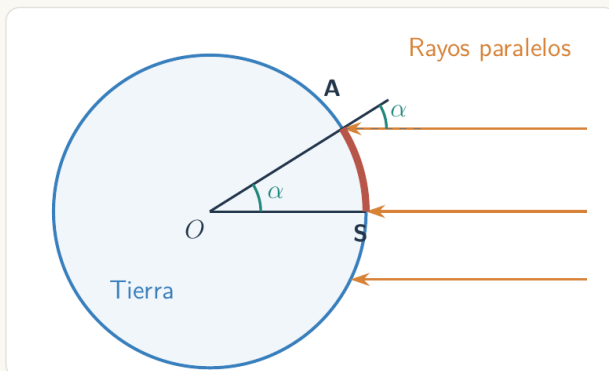
kilómetros y los datos redondeados son nuestra adaptación para el aula.

Ejemplo 2: Eratóstenes: sombras con alcance planetario

Las verticales locales apuntan al centro de la esfera. Como los rayos solares son paralelos, el ángulo entre esas verticales coincide con el ángulo observado de $7,2^\circ$.

Una sombra para medir la Tierra

ERATÓSTENES / Las verticales apuntan al centro; los rayos solares son paralelos.



Datos del modelo

$$\alpha = 7,2^\circ$$

Arco entre A y S: 800 km

$$\frac{7,2}{360} = \frac{1}{50}$$

Una parte revela el todo.

Esquema no a escala: el ángulo se ha ampliado para verlo. Datos adaptados para el aula.

El arco entre las ciudades representa esta fracción de la circunferencia:

$$\frac{7,2^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{50}$$

Así, en nuestro modelo,

$$C = 50 \cdot 800 = 40\,000 \text{ km}$$

Qué hemos supuesto. La Tierra se ha tratado como una esfera, las ciudades como puntos del mismo meridiano y los rayos como paralelos. Una buena respuesta incluye estas condiciones.

El cálculo histórico utilizaba estadios, cuya equivalencia exacta con nuestros metros es discutida. No debemos presentar nuestros 800 km como una medida tomada literalmente por Eratóstenes. Lo que reconstruimos es la fuerza de su razonamiento.

5.1.3. UNA PREGUNTA QUE NOS ACOMPAÑARÁ HASTA RIEMANN

Un número primo es un entero mayor que 1 cuyos únicos divisores positivos son 1 y él mismo. Los primos permiten descomponer los enteros en factores, pero aparece una duda: ¿podría existir un último primo, gigantesco y muy orgulloso de cerrar la lista?

Teorema 1: Euclides: los números primos no se terminan

Existen infinitos números primos.

Demostración

Supongamos que una lista finita $p_1, \dots, p_k$ contiene todos los primos. Construimos

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$$

Al dividir N por cualquiera de los primos de la lista, sobra 1. Como $N > 1$, tiene algún divisor primo. Ese divisor no puede estar en la lista. Por tanto, ninguna lista finita puede contenerlos todos.

Atención: no hemos afirmado que N sea siempre primo. Lo que aseguramos es que tiene un divisor primo nuevo. Saber que hay infinitos primos abre otra pregunta: *¿cómo se reparten?* Guardamos esa pregunta; volverá al final del capítulo.

5.2. DE LA ESCRITURA DE LOS NÚMEROS AL ÁLGEBRA

Épocas y herramientas. Viajamos por distintas tradiciones: tableros de cálculo en China, numeración posicional en India, problemas escritos con palabras en el Bagdad del siglo IX y ecuaciones del Renacimiento. Primero trabajaremos con cantidades y áreas; después miraremos su traducción simbólica.

5.2.1. ANTES DE RESOLVER, NECESITAMOS ESCRIBIR

La numeración decimal posicional se desarrolló en India y se difundió, con transformaciones, a través del mundo islámico y posteriormente a Europa. En el año 628, **Brahmagupta** expuso reglas para operar con cero y cantidades negativas. Algunas cuestiones, como la división por cero, todavía no estaban resueltas correctamente. La historia también incluye revisar reglas que parecían razonables.

En un sistema posicional, 205 significa dos centenas, ninguna decena y cinco unidades. El cero permite conservar el lugar:

$$205 = 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5$$

Por otra vía, los *Nueve capítulos sobre el arte matemático*, compilados en la China antigua, contienen procedimientos de eliminación para resolver sistemas. No los llamaban «método de **Gauss**»: Gauss todavía tardaría bastantes siglos en llegar a clase.

Problema inicial: Un terreno contado con palabras

Estamos en un taller de cálculo de inspiración medieval. Un terreno cuadrado y diez rectángulos de anchura una unidad y longitud igual al lado del cuadrado suman 39 unidades de área. Encuentra ese lado completando una figura. Deja descansar un momento a la fórmula de segundo grado.

5.2.2. COMPLETAR UN CUADRADO ANTES DE MEMORIZAR UNA FÓRMULA

Al-Juarismi, en el siglo IX, organizó métodos para resolver ecuaciones motivadas por reparos, comercio y otras necesidades. Escribía sus razonamientos con palabras. El término *álgebra* procede de *al-jabr*, una de las operaciones descritas en su obra.

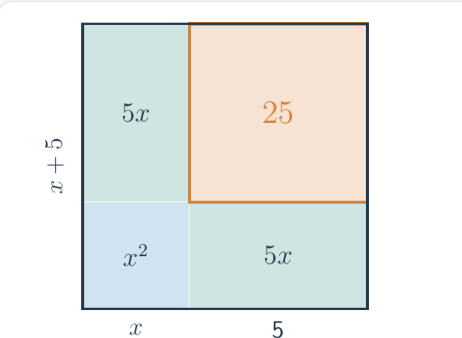
Ejemplo 3: El hueco que resuelve una ecuación

Usamos x para el lado, con notación actual. El problema se traduce en $x^2 + 10x = 39$, con $x > 0$.

- a) Dividimos el área $10x$ en dos rectángulos de área $5x$. Los colocamos junto a dos lados consecutivos del cuadrado. Falta un cuadrado de lado 5 para completar la figura.

Resolver una ecuación construyendo un área

ÁLGEBRA / Completar el cuadrado tiene un significado geométrico.



La pieza que faltaba

$$x^2 + 10x = 39$$

Al añadir 25 a ambos lados,
completamos un cuadrado.

$$(x + 5)^2 = 64$$

Como $x > 0$, resulta $x = 3$.

Reconstrucción didáctica inspirada en métodos de áreas; empleamos notación moderna.

- b) Añadimos el área que falta a ambos lados de la igualdad:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \quad \Rightarrow \quad (x + 5)^2 = 64$$

Como $x + 5$ es una longitud positiva, $x + 5 = 8$ y $x = 3$. El terreno original tiene área 9.

- c) Con nuestra interpretación algebraica moderna también aparece la solución $x = -13$. Satisface la ecuación, pero no representa el lado del terreno. El contexto determina qué soluciones admitimos.

El ejemplo numérico es histórico; la disposición de las piezas es una reconstrucción didáctica. **Completar cuadrados** conecta una operación algebraica con una figura que podemos comprender.

5.2.3. CUANDO UNA CUENTA PIDE NÚMEROS QUE AÚN NO ENTENDEMOS

En el Renacimiento, la búsqueda de fórmulas para las ecuaciones cúbicas impulsó otro cambio. En el trabajo de **Cardano** y, después, de **Bombelli**, aparecieron raíces de números negativos incluso en problemas con soluciones reales. Bombelli desarrolló reglas de cálculo con estas cantidades en su *Álgebra* de 1572.

Definición

Los números complejos se escriben como $a + bi$, donde a, b son reales e $i^2 = -1$. El número a es su parte real y b su parte imaginaria. Podemos representarlos como puntos (a, b) de un plano.

Ejemplo 4: Salir de los reales para volver con una solución

Una ventana de ampliación. Nos basta recordar $i^2 = -1$ y multiplicar con calma; no necesitamos aprender la fórmula de la cúbica. La ecuación $x^3 = 15x + 4$ tiene la solución real $x = 4$. Sin embargo, una expresión obtenida mediante la fórmula de la cúbica lleva a buscar raíces cúbicas de $2 + 11i$ y $2 - 11i$.

a) Con $i^2 = -1$, comprobamos directamente que

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i \quad \text{y} \quad (2 - i)^3 = 2 - 11i$$

b) Elegimos esas raíces cúbicas conjugadas y las sumamos:

$$(2 + i) + (2 - i) = 4$$

El resultado satisface la ecuación, pues $4^3 = 15 \cdot 4 + 4$.

Una cantidad compleja tiene varias raíces cúbicas; aquí hemos seleccionado dos que funcionan, sin afirmar que sean las únicas. La sorpresa es que ampliar los números disponibles ayuda a resolver un problema cuyo resultado final es real. Conserva esta idea: Riemann también nos hará entrar en el plano complejo.

5.3. UNIR GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA

Época y herramientas. Siglo XVII: problemas geométricos, proporciones y ecuaciones. **Descartes** y **Fermat** contribuyeron a desarrollar la geometría analítica. La *Géométrie* de Descartes apareció en 1637. Nosotros usaremos ejes cartesianos actuales para hacer visible la conexión.

Problema inicial: Pasar por el río sin dar un rodeo

Dos puntos A y B están en el mismo lado de una orilla recta. Una persona debe ir desde A hasta B , tocando antes algún punto de la orilla. Supón un terreno plano sin obstáculos y desplazamientos en línea recta. Encuentra dónde tocar la orilla para minimizar la distancia total. Empieza con un dibujo y una reflexión.

Definición

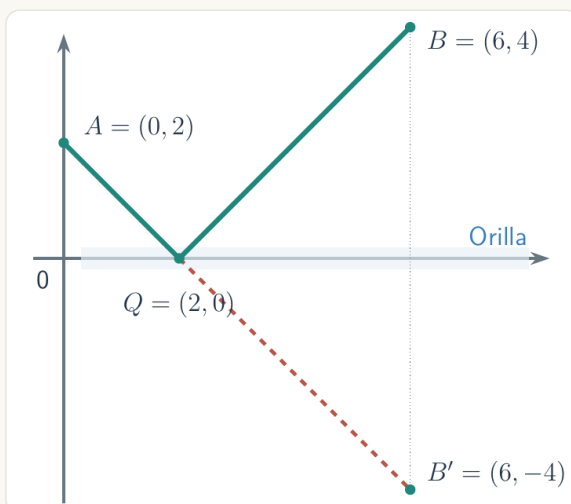
En la **geometría analítica**, representamos puntos mediante coordenadas y figuras mediante relaciones entre esas coordenadas. Por ejemplo, una recta puede describirse con una ecuación como $y = mx + b$. Así podemos traducir un problema geométrico a uno algebraico, y volver a interpretar su solución en el dibujo.

Ejemplo 5: Un reflejo que evita probar todas las rutas

Este problema geométrico clásico, asociado a la tradición de **Herón**, es anterior al siglo XVII. Lo recuperamos para comparar dos lenguajes. Tomamos la orilla como $y = 0$, con $A = (0, 2)$ y $B = (6, 4)$.

La ruta más corta aparece en el espejo

GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA / Buscar el punto de la orilla que minimiza el recorrido.



Reflejar cambia la mirada

$$QB = QB'$$

El tramo quebrado se compara con un segmento recto.

$$AQ + QB \geq AB'$$

La recta AB' es $y = 2 - x$.

Cruza la orilla cuando $x = 2$.

Distancia mínima: $6\sqrt{2}$.

Los ejes utilizan la misma escala. El reflejo conserva la distancia hasta cualquier punto de la orilla.

- a) **Con un dibujo.** Reflejamos B al otro lado de la orilla y obtenemos $B' = (6, -4)$. Para cualquier punto Q de la orilla, $QB = QB'$. Por tanto,

$$AQ + QB = AQ + QB' \geq AB'$$

La igualdad se alcanza cuando A, Q, B' están alineados. El segmento AB' cruza la orilla, así que esa ruta existe.

- b) **Con una ecuación.** La recta por A y B' es $y = 2 - x$. Su intersección con $y = 0$ es $Q = (2, 0)$. La distancia mínima vale

$$AB' = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

La geometría explica por qué la ruta es óptima y el álgebra permite encontrar sus coordenadas. Hoy esta colaboración aparece en diseño, óptica, navegación y gráficos digitales. No hemos probado una ruta tras otra: hemos cambiado la forma de mirar el problema.

5.4. EL AZAR Y EL CAMBIO: NUEVAS FORMAS DE PREDECIR

Época y herramientas. Siglo XVII: monedas, tablas de casos, dibujos de curvas y cocientes entre incrementos. Veremos dos preguntas diferentes: cómo repartir ante la incertidumbre y cómo describir un movimiento que cambia a cada instante.

5.4.1. UNA PARTIDA INTERRUPTIDA PUEDE INICIAR UNA TEORÍA

En 1654, **Pascal** y Fermat intercambiaron cartas sobre problemas de azar, entre ellos el reparto de una partida interrumpida. Había estudios anteriores sobre juegos; su correspondencia fue un paso importante en el desarrollo de una teoría sistemática de la probabilidad.

Problema inicial: El premio y la partida a medias

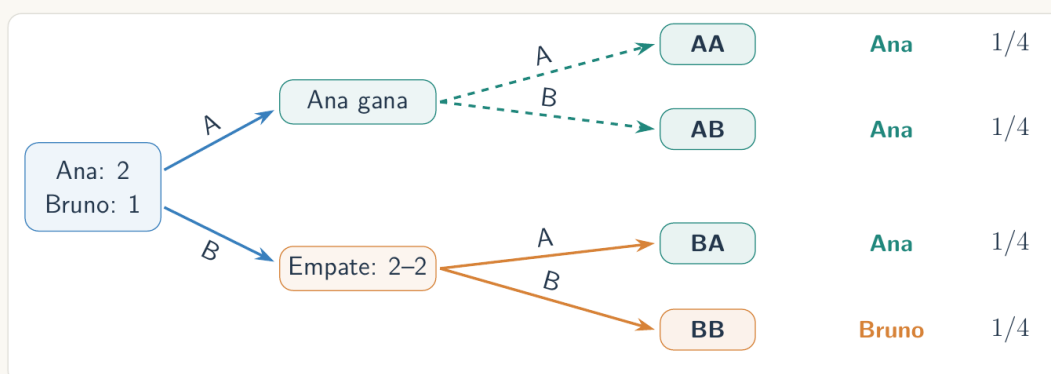
Ana y Bruno juegan rondas independientes, con la misma probabilidad de ganar cada ronda y sin empates. Vence quien consiga primero tres puntos. El premio es de 48 monedas. La partida se interrumpe cuando Ana lleva dos puntos y Bruno uno. Decidid qué reparto representa las posibilidades que tenían de ganar si la partida hubiera continuado. Las monedas son imaginarias; el argumento, por favor, que sea real.

Ejemplo 6: Repartir según lo que falta por jugar

Ana necesita una victoria más; Bruno necesita dos. Podemos imaginar dos rondas adicionales, aunque alguna ya no sea necesaria. Los cuatro pares de resultados son equiprobables.

Una partida interrumpida, cuatro futuros posibles

PASCAL Y FERMAT / A: gana Ana una ronda. B: gana Bruno una ronda.



Las ramas discontinuas completan rondas imaginarias tras una victoria. Así los cuatro casos tienen probabilidad $1/4$.

- En las secuencias AA , AB y BA , Ana alcanza antes los tres puntos. En BB , los alcanza Bruno. Si Ana gana la primera ronda, el segundo resultado imaginado no cambia nada; sirve para que todos los casos tengan la misma probabilidad.
- Las probabilidades de victoria son $3/4$ para Ana y $1/4$ para Bruno. El reparto proporcional del premio es

Ana: 36 monedas Bruno: 12 monedas

Repartir en proporción $2 : 1$ a los puntos ya obtenidos ignoraría las posibilidades de victoria que quedan. Hemos usado el **valor esperado**: el premio multiplicado por la probabilidad de recibirlo. Este criterio depende de las reglas probabilísticas que hemos fijado.

5.4.2. UNA VELOCIDAD NO ES SOLO UNA DISTANCIA DIVIDIDA POR UN TIEMPO

Astronomía, movimiento, tangentes y áreas planteaban preguntas para las que los métodos existentes resultaban insuficientes. **Newton** y **Leibniz** desarrollaron el cálculo en el siglo XVII, apoyándose en trabajos anteriores. Su relación entre derivar e integrar permitió organizar muchos problemas con un método general. La formulación rigurosa mediante límites se consolidó después.

Problema inicial: Un móvil sin velocímetro

En un modelo de movimiento, la distancia recorrida en t segundos es $s(t) = t^2$ metros, para $t \geq 0$. Averigua la velocidad justo en el instante $t = 2$. Puedes comparar posiciones en tiempos cercanos. La calculadora del futuro todavía no tiene permiso para derivar.

Ejemplo 7: Acercarse a un instante sin dividir entre cero

Entre 2 y $2 + h$, con $h > 0$, la velocidad media es

$$\frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4 + h$$

Para $h = 1, 0,1$ y $0,01$, obtenemos $5, 4,1$ y $4,01$ metros por segundo. Al hacer h cada vez menor, esos valores se aproximan a 4 .

No sustituimos $h = 0$ en el cociente original: estudiamos su límite. El mismo resultado se obtiene acercándonos desde tiempos anteriores. Con la notación actual,

$$s'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = 4 \text{ m/s}$$

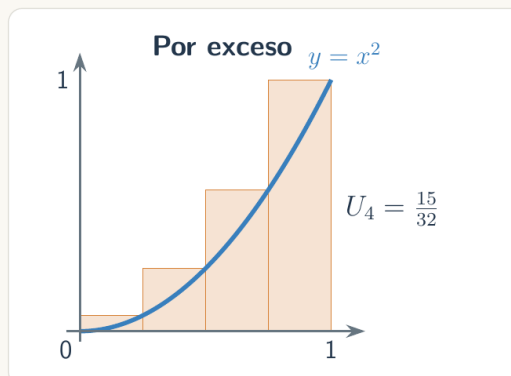
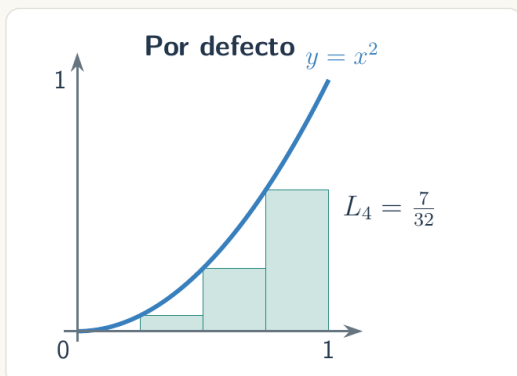
El límite convierte «cada vez más cerca» en una afirmación precisa. Esta es la idea que hay detrás de la derivada que ya conoces.

Ejemplo 8: Una región curva construida con rectángulos

Queremos hallar el área bajo $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 1$. Antes de usar una primitiva, dividimos la base en n intervalos iguales. Como x^2 es creciente, la altura del extremo izquierdo da rectángulos interiores y la del derecho da rectángulos exteriores.

Atrapar un área entre dos aproximaciones

CÁLCULO / Cuatro rectángulos ya permiten encerrar el área bajo la parábola.



Al aumentar el número de rectángulos, ambas aproximaciones convergen al mismo valor: $1/3$.

Las sumas inferior y superior son

$$L_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \quad U_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

Usando la identidad $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, resulta

$$L_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \quad U_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Ambas expresiones tienden a $1/3$. El área queda entre ellas, así que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Arquímedes ya había utilizado aproximaciones geométricas y argumentos de agotamiento muchos siglos antes. Esta reconstrucción con sumas y límites emplea notación posterior: muestra una continuidad de ideas, sin atribuirle nuestros símbolos. La integral actual organiza precisamente ese paso de sumar piezas a medir una región.

Nota

Otra rama que creció con los problemas reales. La estadística desarrolló herramientas para recoger datos, compararlos y tomar decisiones. En el siglo XIX, **Florence Nightingale** utilizó tablas y diagramas para argumentar mejoras sanitarias. Calcular probabilidades y estudiar datos observados se complementan, pero no son lo mismo.

Hoy analizamos encuestas, consumos y resultados experimentales. Una gráfica puede ayudar a descubrir una relación; para afirmar que una cosa causa otra hacen falta argumentos adicionales.

5.5. EULER: DE LAS FIGURAS A LAS REDES

Época y herramientas. En la década de 1730, Euler estudió el problema de los puentes de Königsberg. Para acompañarlo basta papel y lápiz: vamos a conservar las conexiones y a dejar de medir distancias. Es el origen histórico de una idea que ya conoces del primer trimestre.

Problema inicial: Siete puentes y un paseo imposible

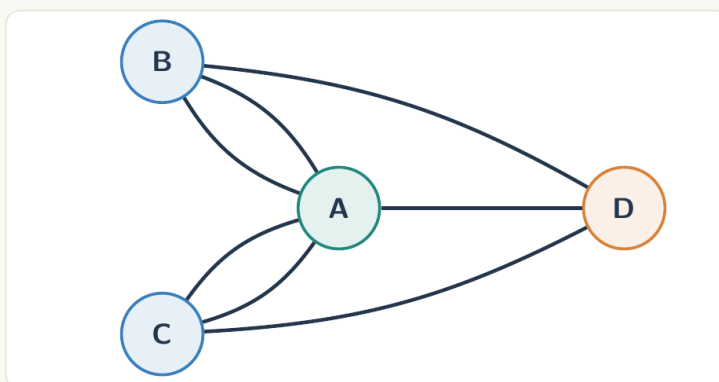
Cuatro zonas de tierra están conectadas por siete puentes, como en el esquema del ejemplo. Busca un paseo que cruce cada puente exactamente una vez. Puedes elegir dónde empezar y dónde terminar. Antes de dibujar el intento número diecisiete, piensa qué sucede cada vez que entras y sales de una zona.

Ejemplo 9: La ciudad que se convirtió en un grafo

El esquema conserva las conexiones del problema histórico; no representa un plano a escala. Los puentes paralelos son diferentes y hay que atravesar cada uno.

Siete puentes; una imposibilidad demostrada

EULER / Las tierras se convierten en vértices y los puentes en aristas.



Contar cambia
el problema

$$\deg(A) = 5$$

$$\deg(B) = \deg(C) = 3$$

$$\deg(D) = 3$$

Cuatro vértices impares.

El dibujo conserva las conexiones del problema histórico, no su geografía. Las aristas paralelas son puentes distintos.

Los grados de las cuatro zonas son 5, 3, 3, 3: todos impares. En un recorrido que usa cada arista una vez, cada llegada a un vértice intermedio necesita una salida. Las aristas utilizadas allí se emparejan. Solo el principio y el final pueden quedar sin pareja.

Por tanto, un recorrido así puede tener como máximo dos vértices de grado impar. Aquí hay cuatro: el paseo es imposible. Cambiar el dibujo o alargar los puentes no modifica esa dificultad. Cambiar las conexiones sí podría hacerlo.

El salto de idea. La información decisiva no era la forma de las islas, sino cómo estaban conectadas. Esta abstracción abrió el camino a la teoría de grafos y a preguntas sobre la estructura de los espacios. Tus rutas del instituto pertenecen a esa misma familia.

Propiedades

Otra observación de Euler conecta caras, aristas y vértices de un poliedro convexo:

$$V - E + F = 2$$

En un cubo, $8 - 12 + 6 = 2$; en un tetraedro, $4 - 6 + 4 = 2$. La forma y las medidas cambian, pero esta relación se mantiene. No la aplicamos sin condiciones a cualquier objeto con agujeros.

La **topología** estudia propiedades que se conservan bajo transformaciones continuas apropiadas. Cuando hablamos de que dos superficies tienen la misma forma topológica, permitimos deformarlas, pero no cortar, pegar puntos distintos ni crear agujeros.

5.6. LOS LÍMITES DE LAS HERRAMIENTAS

Épocas y herramientas. Volvemos a preguntas griegas y seguimos su historia hasta el siglo XIX. Empezamos con regla sin marcas y compás. Después utilizaremos resultados algebraicos modernos para entender por qué algunos intentos no podían funcionar.

Problema inicial: Duplicar un cubo sin hacer ocho

Un cubo tiene arista una unidad. Queremos otro de volumen exactamente doble. Si duplicas la arista, obtienes ocho veces el volumen. Determina qué longitud necesitas y estudia si podrías construirla exactamente usando solo regla sin marcas y compás.

5.6.1. UNA RESPUESTA NEGATIVA TAMBIÉN PUEDE SER UNA CONQUISTA

La duplicación del cubo, la trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo ocuparon a muchos geómetras. Las historias sobre el altar de Delos pertenecen a la tradición transmitida sobre el problema; no conviene presentarlas como un episodio histórico comprobado.

La palabra clave es *exactamente*. Una aproximación excelente puede servir para fabricar una pieza, pero no resuelve una construcción exacta sometida a reglas.

Definición

Una longitud es **construible con regla y compás**, a partir de un segmento unidad, si puede obtenerse en un número finito de pasos trazando rectas por puntos conocidos, circunferencias con centros y radios ya contruidos, y sus intersecciones. La regla no tiene marcas y no se permiten otros instrumentos.

Teorema 2: Una restricción algebraica de la regla y el compás

Si una longitud real es construible a partir de la unidad, es un número algebraico cuyo polinomio mínimo sobre los racionales tiene grado igual a una potencia de 2.

El *polinomio mínimo* es el polinomio mónico de menor grado, con coeficientes racionales, que tiene ese número como raíz. Este resultado requiere álgebra que no desarrollaremos

aquí. Su idea de fondo es que las intersecciones permitidas conducen a ecuaciones lineales o cuadráticas, encadenadas en pasos finitos. Es una condición necesaria: no afirmamos que el grado, por sí solo, garantice la construcción.

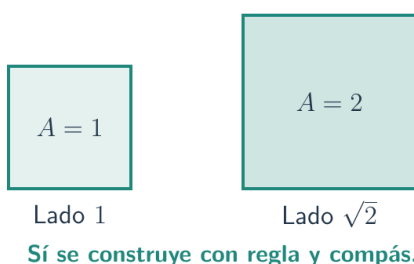
Ejemplo 10: Del cubo a una prueba de imposibilidad

Si a es la nueva arista, necesitamos $a^3 = 2$, es decir, $a = \sqrt[3]{2}$. La comparación con duplicar un cuadrado es reveladora.

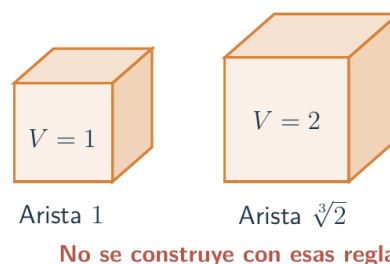
Cambiar la dimensión cambia las posibilidades

REGLA SIN MARCAS Y COMPÁS / El objetivo es una longitud exacta, no una aproximación.

Duplicar un área



Duplicar un volumen



La construcción de la diagonal da $\sqrt{2}$. La duplicación del cubo exigiría una longitud de grado algebraico 3.

- La diagonal del cuadrado unidad mide $\sqrt{2}$. Un cuadrado construido sobre ella tiene área 2. Podemos duplicar el área con regla y compás, aunque $\sqrt{2}$ sea irracional.
- Para el cubo, el polinomio $X^3 - 2$ es irreducible sobre los racionales: una cúbica reducible tendría una raíz racional, y ninguno de sus posibles candidatos enteros, $\pm 1, \pm 2$, es raíz. El grado de $\sqrt[3]{2}$ es, por tanto, 3. Como 3 no es una potencia de 2, esa arista no es construible con los instrumentos permitidos.

Wantzel demostró la imposibilidad en 1837. No significa que el cubo de volumen doble no exista, ni que no podamos aproximarle o construirlo con otras herramientas. Significa algo mucho más preciso: **las reglas elegidas no permiten esa construcción exacta**. Lo imposible no era cuestión de practicar un poquito más.

Propiedades

Otros problemas cuyo desenlace dependía de precisar las reglas.

- **Trisecar cualquier ángulo con regla y compás.** No existe un procedimiento válido para todos los ángulos. Algunos sí se trisecan: 90° puede dividirse en tres ángulos de 30° . Wantzel demostró la imposibilidad general en 1837.
- **Cuadrar el círculo con regla y compás.** Para un círculo de radio 1, el cuadrado equivalente debería tener lado $\sqrt{\pi}$. **Lindemann** demostró en 1882 que π es trascendente, es decir, que no es raíz de ningún polinomio no nulo con coeficientes racionales. Si $\sqrt{\pi}$ fuera construible, su cuadrado π sería algebraico. Por eso la construcción

exacta es imposible.

- **Una fórmula con radicales para cualquier ecuación de quinto grado.** Abel demostró en 1824 que no existe una fórmula general de ese tipo. **Galois** relacionó después la posibilidad de resolver por radicales con la estructura de ciertas simetrías de las raíces. Hay ecuaciones concretas que sí se resuelven así: $x^5 - 2 = 0$ tiene la raíz real $\sqrt[5]{2}$. Y calcular aproximaciones numéricas es otra cuestión.

5.6.2. TAMBIÉN PODEMOS REVISAR EL ESPACIO DONDE TRABAJAMOS

Durante siglos se intentó deducir el postulado de las paralelas a partir de los demás postulados de la geometría euclídea. En el siglo XIX, **Lobachevski** y **Bolyai** desarrollaron geometrías con otra regla para las paralelas. Los modelos posteriores de **Beltrami** ayudaron a establecer su consistencia relativa.

Esto no convierte la geometría euclídea en un error. Nos enseña que las conclusiones dependen de las hipótesis y de qué espacio estemos estudiando.

Ejemplo 11: Un triángulo que no suma ciento ochenta grados

En una esfera ideal, salimos del polo norte, bajamos por un meridiano hasta el ecuador, recorremos un cuarto del ecuador y regresamos al polo por otro meridiano. Los tres lados son arcos de círculos máximos. Cada ángulo interior mide 90° , de modo que

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

No hemos encontrado un fallo en el teorema del triángulo plano: hemos construido un triángulo sobre una esfera. Los arcos cortos de círculos máximos son las rutas de menor longitud en ese modelo, lo que ayuda a entender la navegación sobre la Tierra.

La geometría esférica ilustra que hay espacios diferentes. Este dibujo mental, por sí solo, no demuestra la independencia del postulado euclídeo: esa cuestión exige comprobar un sistema completo de hipótesis.

5.7. DEL INFINITO A LAS MÁQUINAS

Épocas y herramientas. De finales del siglo XIX al siglo XX: listas, correspondencias, razonamiento lógico y procedimientos escritos paso a paso. No necesitaremos encender un ordenador para pensar sobre sus límites.

Problema inicial: Un hotel completo con habitaciones de sobra

Un hotel imaginario tiene una habitación por cada entero positivo: $1, 2, 3, \dots$. Todas están ocupadas. Llega una persona más. Busca una reorganización que le deje una habitación sin expulsar a nadie. Después imagina que llega una fila de personas también numerada $1, 2, 3, \dots$

5.7.1. NO TODOS LOS INFINITOS TIENEN EL MISMO TAMAÑO

Cantor desarrolló en el siglo XIX una teoría para comparar conjuntos infinitos mediante correspondencias. El hotel de **Hilbert** es una ilustración posterior, del siglo XX, que nos ayuda a entrar en esas ideas. No es una propuesta de alojamiento para la excursión.

Definición

Un conjunto infinito es **numerable** si sus elementos pueden ponerse en correspondencia uno a uno con $1, 2, 3, \dots$. Cada elemento debe aparecer en alguna posición finita de la lista, sin faltar ninguno y sin repeticiones.

Ejemplo 12: Reorganizar un infinito sin terminar nunca de contarlos

- Una persona nueva.** Quien ocupa la habitación n se traslada a la $n + 1$. La habitación 1 queda libre. Cada huésped tiene un destino y dos huéspedes distintos nunca reciben la misma habitación.
- Una fila numerable de personas nuevas.** Quien ya estaba en la habitación n pasa a la $2n$. La persona nueva número k entra en la $2k - 1$. Los antiguos ocupan los pares y los nuevos los impares.

La correspondencia $n \leftrightarrow 2n$ también muestra que hay tantos enteros positivos como enteros positivos pares, en el sentido de que pueden emparejarse uno a uno. Para conjuntos infinitos, una parte propia puede tener el mismo tamaño que el conjunto entero.

Ejemplo 13: La lista de decimales que siempre deja uno fuera

Supongamos que alguien asegura haber enumerado todos los reales del intervalo $(0, 1)$. Escribe sus decimales en filas. Elegimos siempre la expansión que no acaba en una cola infinita de nueves, para evitar la duplicidad de expresiones como $0,4999\dots = 0,5$.

El número que se escapa de cualquier lista

CANTOR / Una tabla finita ilustra un razonamiento sobre todas las filas.

Fila 1	0,	3	1	4	1	5	9	...
Fila 2	0,	1	4	1	4	2	1	...
Fila 3	0,	2	7	1	8	2	8	...
Fila 4	0,	1	0	1	0	1	0	...
Fila 5	0,	5	7	7	2	1	5	...
								...

Cambia la cifra diagonal

Si es 1, escribimos 2.

Si no es 1, escribimos 1.

0,11212...

Difiere de la fila n
en su cifra n .

Usamos decimales sin colas infinitas de nueves. El nuevo número, formado solo por unos y doses, no está en la lista.

Fabricamos un nuevo decimal $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$:

- Si la cifra n del número de la fila n es 1, ponemos $b_n = 2$.
- En cualquier otro caso, ponemos $b_n = 1$.

El número b pertenece a $(0, 1)$ y difiere del primer número en su primera cifra, del segundo en su segunda cifra y, en general, del número de la fila n en su cifra n . Como solo usa unos y doses, tampoco presenta la ambigüedad de los nueve.

Por tanto, b no aparece en ninguna fila. Esto contradice que la lista contuviera todos los reales del intervalo. **Los reales de $(0, 1)$ no son numerables.** La imagen enseña unas pocas filas; la demostración utiliza una regla que actúa sobre cualquier posición, por lejos que esté.

5.7.2. UN LÍMITE QUE NO SE ARREGLA COMPRANDO MÁS MEMORIA

En la década de 1930, **Church** y **Turing** precisaron ideas fundamentales sobre qué significa calcular mediante un procedimiento. Turing estudió máquinas abstractas con reglas finitas y una cinta de símbolos. La teoría de la computación permitió preguntar con rigor si hay tareas para las que no existe ningún algoritmo general.

Ejemplo 14: El detector de programas que se contradice

Una ventana de ampliación. Imagina un programa H que siempre termina y que acierta, para cualquier programa P y cualquier entrada x , si P terminará al recibir x . Queremos comprobar si puede existir ese detector universal.

Los programas pueden codificarse como datos. Con ayuda de H , definimos un nuevo programa D , que recibe el código de un programa P :

- Si H dice que P termina al recibir su propio código, D entra en un bucle infinito.
- Si H dice que P no termina al recibir su propio código, D termina inmediatamente.

Ahora ejecutamos D con su propio código.

- a) Si H predice que termina, la definición de D hace que no termine.
- b) Si H predice que no termina, D termina.

Ambas respuestas contradicen que H siempre acierte. Por tanto, no existe ese algoritmo universal. Es el **problema de la parada**, explicado con lenguaje actual.

Podemos decidir si terminan muchos programas concretos. Lo imposible es disponer de un procedimiento que termine y acierte para *todos* los programas y entradas. Aquí no estamos ante un problema abierto ni ante una máquina simplemente lenta.

5.7.3. ENCONTRAR Y COMPROBAR: LA PREGUNTA P FRENTE A NP

Otra cuestión es el tiempo que requiere un problema que sí admite un procedimiento. Si alguien te entrega una ruta, puedes revisar sus conexiones; encontrarla desde cero puede

ser mucho más complicado.

Definición

En problemas de decisión, cuya respuesta es «sí» o «no»:

- P reúne los problemas resolubles por un algoritmo determinista en tiempo polinómico respecto al tamaño de la entrada.
- NP reúne los problemas cuyas respuestas afirmativas tienen certificados de tamaño polinómico que pueden verificarse en tiempo polinómico.

«Polinómico» significa acotado por una potencia fija del tamaño de los datos, multiplicada por una constante. Aquí sirve para distinguir formas de crecimiento; no garantiza que el tiempo práctico sea pequeño. Sabemos que $P \subseteq NP$. La pregunta es si $P = NP$.

Ejemplo 15: La ruta ya escrita y la ruta que hay que descubrir

Tenemos cuatro lugares A, B, C, D , con conexiones en ambos sentidos. Los tiempos son

$$AB = 2, \quad BC = 3, \quad CD = 2, \quad DA = 3, \quad AC = 6, \quad BD = 6$$

Queremos saber si existe una ruta que visite cada lugar una sola vez, vuelva al inicio y tarde como máximo 10 unidades de tiempo.

- Comprobar.** Alguien propone $A - B - C - D - A$. Revisamos los lugares y sumamos $2 + 3 + 2 + 3 = 10$. Esa ruta es un certificado de que la respuesta es «sí».
- Buscar.** Con cuatro lugares podemos revisar todas las rutas. En una red completa simétrica de $n \geq 3$ lugares, fijando el inicio y contando una ruta y su inversa como una sola, hay

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

ciclos posibles. Enumerarlos todos crece mucho más rápido que revisar una ruta dada.

La cuestión importante afecta a la *familia* de problemas cuando aumenta el tamaño, no solo a este mapa de cuatro puntos. El problema de decisión del viajante es NP -completo: si encontráramos un algoritmo polinómico para todos sus casos, se deduciría $P = NP$.

Que la búsqueda por fuerza bruta sea lenta no demuestra que ningún otro algoritmo pueda ser rápido. Esa es precisamente la dificultad. Si $P = NP$, cambiaría nuestra comprensión de muchas tareas de búsqueda; si $P \neq NP$, sabríamos que algunas verificaciones eficientes no tienen un método general de resolución polinómico.

5.8. PRIMOS, CONJETURAS Y PROBLEMAS DEL MILENIO

Regresamos a la pregunta que dejamos con Euclides. Ya sabemos que los primos no se terminan. Ahora queremos entender su distribución. Este hilo conecta una demostración antigua,

las series de Euler, el análisis complejo de Riemann y preguntas actuales.

Problema inicial: Una lista infinita no explica cómo se reparte

Escribe los primos hasta 30 y observa las distancias entre vecinos. Después cuenta cuántos hay hasta 10, 20 y 30. ¿Se mantiene una separación fija? ¿Podría haber una regularidad en el conjunto aunque los saltos individuales cambien? Empieza con una criba sobre papel, como en la tradición de Eratóstenes.

5.8.1. PRIMERO, CONTAR; DESPUÉS, PREDECIR

Definición

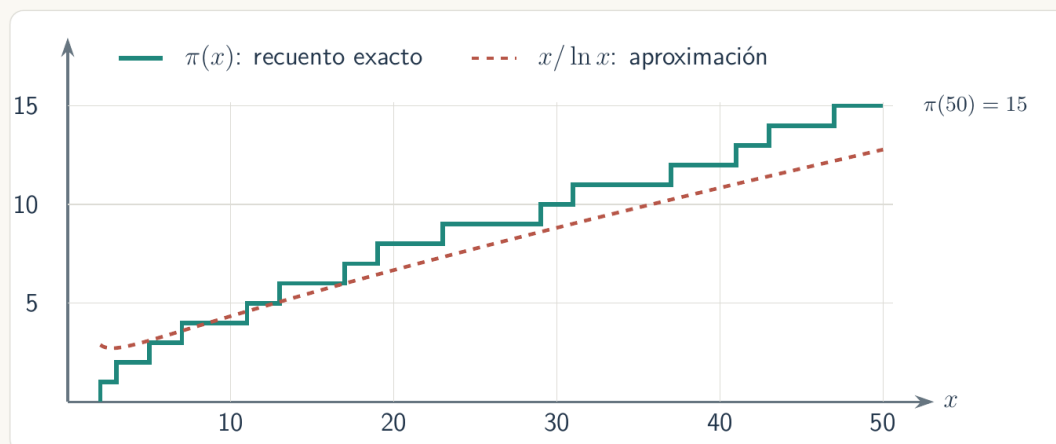
Para $x \geq 2$, escribimos $\pi(x)$ para el número de primos menores o iguales que x . Por ejemplo, $\pi(10) = 4$, porque contamos 2, 3, 5, 7. Aquí $\pi(x)$ es el nombre de una función: no debemos confundirlo con la constante π de la circunferencia.

Ejemplo 16: Una escalera de primos

La función $\pi(x)$ sube una unidad cada vez que pasamos por un primo y permanece constante entre esos saltos.

Primos: una escalera y una tendencia

TEORÍA DE NÚMEROS / Cada salto aparece al encontrar un nuevo número primo.



La aproximación describe el comportamiento a largo plazo; no indica la posición exacta de cada primo.

La aproximación $x/\log x$, donde $\log$ es el logaritmo natural, permite comparar el recuento con una curva sencilla.

x	$\pi(x)$	$x/\log x$, aproximadamente
10	4	4,34
100	25	21,71
1000	168	144,76
10000	1229	1085,74

No es una fórmula exacta: ni siquiera da siempre un entero. La regularidad está en el comportamiento relativo a gran escala, no en que cada intervalo tenga el mismo número de primos.

Teorema 3: Teorema de los números primos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

Hadamard y de la Vallée Poussin lo demostraron independientemente en 1896. Afirma que el error *relativo* de esa aproximación tiende a cero. No afirma que la diferencia entre ambas cantidades tienda a cero ni que disminuya en cada paso. Este teorema ya está demostrado: no depende de que se resuelva la hipótesis de Riemann.

5.8.2. EULER CONECTA UNA SUMA CON TODOS LOS PRIMOS

Definición

Para un número real $s > 1$, la función zeta se define mediante la serie convergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

La suma infinita es el límite de sus sumas parciales. Por ejemplo, $\zeta(2)$ suma los inversos de los cuadrados.

Ejemplo 17: Los primos escondidos dentro de una suma

Fijamos $s > 1$. Las series geométricas permiten escribir

$$\frac{1}{1-2^{-s}} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(2^2)^s} + \dots$$

Al multiplicar este factor por el correspondiente a 3, aparece un término $1/(2^a 3^b)^s$ por cada par de enteros $a, b \geq 0$. Así obtenemos los números que solo tienen factores primos 2 y 3.

Si incorporamos sucesivamente todos los primos, cada entero positivo aparece una sola vez por la unicidad de su factorización. Para $s > 1$, la convergencia justifica este paso al límite y obtenemos el **producto de Euler**:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

El símbolo $\prod$ indica un producto, del mismo modo que $\sum$ indica una suma. La igualdad explica por qué estudiar una función puede revelar información sobre los primos. La conexión no es una casualidad decorativa.

5.8.3. RIEMANN CAMBIA EL LUGAR DESDE EL QUE MIRAR

En 1859, Riemann estudió esta función utilizando una variable compleja $s = \sigma + it$, con σ, t reales. El número s se representa en el punto (σ, t) : la parte real es la coordenada horizontal y la parte imaginaria, la vertical.

Propiedades

Lo que necesitamos saber antes de formular la hipótesis.

1. La serie $\sum n^{-s}$ define $\zeta(s)$ cuando $\text{Re}(s) > 1$.
2. Mediante **continuación analítica**, esa función se extiende de manera única y coherente al resto del plano complejo, salvo un polo en $s = 1$, donde no tiene un valor finito. No justificaremos aquí esta herramienta de análisis complejo.
3. Un **cero** es un valor de entrada s para el que $\zeta(s) = 0$. Hay ceros en $-2, -4, -6, \dots$, llamados triviales. Los demás son los **ceros no triviales** y se encuentran en la franja $0 < \text{Re}(s) < 1$.

La serie inicial no converge en la recta $\text{Re}(s) = 1/2$. Allí hablamos de la función extendida: no de sumar directamente aquella serie como si nada hubiera cambiado.

Nota

Hipótesis de Riemann: problema abierto. Todo cero no trivial de la función zeta tiene parte real igual a $1/2$. Es decir, todos estarían sobre la misma recta vertical:

$$\zeta(s) = 0, \quad 0 < \text{Re}(s) < 1 \implies \text{Re}(s) = \frac{1}{2}$$

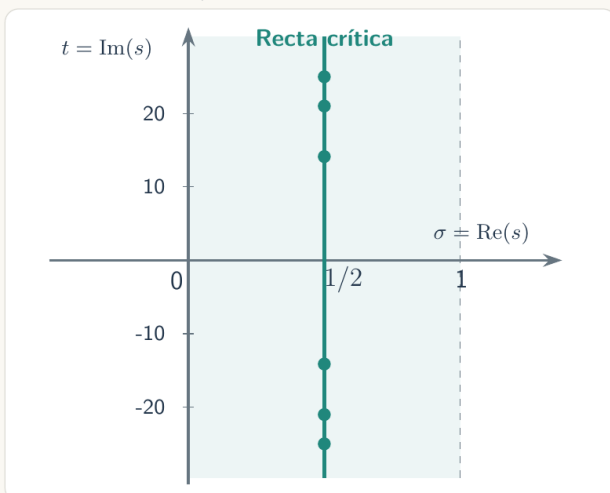
Es una conjetura, no un teorema. Su estado abierto se ha contrastado con el Clay Mathematics Institute al preparar este capítulo.

Ejemplo 18: Leer el mapa de los ceros sin perderse en el plano

La figura muestra algunos ceros no triviales conocidos, con sus coordenadas aproximadas, y sus conjugados.

Riemann: una recta, infinitas preguntas

FUNCIÓN ZETA / La imagen muestra aproximaciones de seis ceros no triviales.



Tres pares de ceros

$$s \approx \frac{1}{2} \pm 14,134725 i$$

$$s \approx \frac{1}{2} \pm 21,022040 i$$

$$s \approx \frac{1}{2} \pm 25,010858 i$$

Franja crítica:

$$0 < \sigma < 1$$

La hipótesis afirma que todos los ceros no triviales están en la recta $\sigma = 1/2$.

Estos puntos no son una prueba.

Los ejes tienen escalas distintas para facilitar la lectura.
Comprobar muchos ceros no demuestra que estén todos.

- a) El primer cero con parte imaginaria positiva está cerca de $s = 1/2 + 14,134725i$. Su coordenada horizontal es $1/2$. No debemos leer esto como $\zeta(1/2) = 0$: la entrada es un número complejo.
- b) Los puntos dibujados están sobre la recta prevista. Eso ilustra resultados conocidos, pero no demuestra que todos los ceros, incluidos los que no caben en la imagen, estén allí.
- c) Bastaría demostrar la existencia de un cero no trivial fuera de esa recta para refutar la hipótesis. En cambio, comprobar una colección finita de ceros sobre la recta no demuestra una afirmación sobre todos ellos.

Una aproximación decimal aislada tampoco certifica que el valor de la función sea exactamente cero. Los cálculos rigurosos necesitan controlar el error. La imagen sirve para entender la afirmación, no sustituye su demostración.

5.8.4. QUÉ CAMBIARÍA UNA SOLUCIÓN

La hipótesis no predice que los primos vayan a colocarse a distancias iguales. Su importancia está en controlar con mucha precisión las desviaciones del recuento respecto a una aproximación. Una aproximación más fina que $x/\log x$ es la integral logarítmica; aquí usamos la convención

$$L(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Propiedades

Una consecuencia precisa, para quien quiera asomarse un poco más. La hipótesis de Riemann equivale a que existan constantes $C > 0$ y $x_0 \geq 2$ tales que, para todo $x \geq x_0$,

$$|\pi(x) - L(x)| \leq C\sqrt{x} \log x$$

No vamos a demostrar esta equivalencia. Sí podemos leerla: el error al contar primos quedaría controlado por una cantidad del orden de $\sqrt{x} \log x$. La constante y el umbral son fijos; no podemos elegir otros distintos cada vez que cambie x .

- **Si se demostrara verdadera**, tendríamos ese control para todos los valores suficientemente grandes. Los resultados ya demostrados bajo la hipótesis pasarían a ser incondicionales, siempre que no dependieran de otras conjeturas.
- **Si se demostrara falsa**, la distribución de los primos tendría desviaciones incompatibles con esa cota general. Habría que revisar las conclusiones que la necesitaran. Los teoremas demostrados sin ella seguirían siendo válidos.
- **En ambos casos**, conoceríamos mejor la conexión entre números primos y análisis complejo. Las técnicas de una solución podrían ser tan importantes como el resultado.

Resolver Riemann no proporciona automáticamente una lista instantánea de todos los primos ni un método práctico para factorizar cualquier número. Tampoco equivale a resolver P frente a NP . Son preguntas diferentes, aunque sus historias se crucen.

5.8.5. UN PROBLEMA QUE SÍ CAMBIÓ DE COLUMNA: FERMAT

Hacia 1637, Fermat escribió una afirmación que generalizaba una ecuación muy familiar. Para el exponente 2, hay soluciones como $3^2 + 4^2 = 5^2$. ¿Qué ocurre con exponentes enteros mayores?

Teorema 4: Último teorema de Fermat

Para todo entero $n > 2$, la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene soluciones en enteros positivos x, y, z .

Durante siglos se resolvieron casos particulares. **Sophie Germain** y otras personas desarrollaron ideas parciales que hicieron avanzar la teoría de números. La demostración de **Wiles**, completada tras superar una dificultad con ayuda de **Taylor**, se publicó en 1995. Utilizaba conexiones entre curvas elípticas y formas modulares, herramientas muy posteriores al enunciado original.

No reproduciremos esa prueba: necesitamos matemáticas universitarias avanzadas para entenderla. Lo que sí podemos comprender es la lección histórica: un problema escrito en una línea puede requerir siglos de conceptos nuevos. Que el enunciado sea corto no hace que tú tengas que resolverlo durante el recreo.

5.8.6. LOS SIETE PROBLEMAS DEL MILENIO

En 2000, el Clay Mathematics Institute seleccionó siete problemas y asignó un premio de un millón de dólares a cada uno. La selección señala algunas grandes preguntas, no todas las cuestiones importantes de las matemáticas.

Propiedades

Un mapa orientativo, no siete enunciados técnicos completos.

1. **Hipótesis de Riemann.** Localizar los ceros no triviales de zeta y comprender sus consecuencias para los primos. Sigue abierta.
2. **P frente a NP.** Comparar resolver eficientemente con verificar eficientemente certificados. Sigue abierto.
3. **Conjetura de Poincaré.** Caracterizar la esfera tridimensional mediante propiedades topológicas. Está resuelta por **Perelman**.
4. **Navier-Stokes.** Entender la existencia y regularidad global de soluciones de ciertas ecuaciones de fluidos en tres dimensiones. Sigue abierto.
5. **Birch y Swinnerton-Dyer.** Relacionar los puntos racionales de una curva elíptica con el comportamiento de su función L . Sigue abierta.
6. **Hodge.** Relacionar ciertas clases topológicas de variedades proyectivas complejas con ciclos algebraicos. Sigue abierta.

7. **Yang–Mills y salto de masa.** Construir rigurosamente una teoría cuántica de Yang–Mills en cuatro dimensiones y demostrar una brecha positiva de masa. Sigue abierto.

Estado contrastado con el Clay Mathematics Institute en septiembre de 2026: Poincaré es el único de los siete que figura como resuelto.

Para acercarnos a Poincaré, pensemos primero en una superficie esférica: cualquier lazo cerrado puede encogerse hasta un punto sin salir de la superficie. En la superficie de una rosquilla hay lazos que rodean un agujero y no pueden contraerse de ese modo.

La conjetura de Poincaré preguntaba algo más profundo, en dimensión tres: toda variedad tridimensional cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera tridimensional. «Cerrada» significa aquí compacta y sin borde; «simplemente conexa» incluye que sea conexa por caminos y que todo lazo pueda contraerse; «homeomorfa» expresa equivalencia topológica. La esfera tridimensional no es la superficie de una pelota ordinaria, que tiene dimensión dos. La comparación con la rosquilla es una puerta de entrada, no una representación literal de la prueba.

Perelman publicó sus trabajos en 2002–2003, apoyándose en el flujo de **Ricci** desarrollado por **Hamilton**. Las ideas relacionaban topología, geometría y ecuaciones de evolución. De nuevo, una rama ayudaba a responder una pregunta de otra.

5.8.7. LO ABIERTO, LO IMPOSIBLE Y LO DEMOSTRADO

Hay preguntas abiertas que podemos entender sin aprender análisis complejo. La conjetura fuerte de **Goldbach** afirma que todo entero par mayor que 2 es suma de dos primos. La conjetura de los primos gemelos afirma que existen infinitas parejas de primos cuya diferencia es 2. En ambos casos conocemos muchos ejemplos, pero no una demostración general. Ninguna pertenece a la lista de los siete problemas del milenio.

Nota

Tres frases que no significan lo mismo.

- «No lo he conseguido» describe el resultado de mis intentos.
- «Es imposible con estas reglas» exige una demostración, como en la duplicación del cubo con regla y compás.
- «Sigue abierto» significa que no se dispone de una resolución aceptada, como ocurre con Riemann.

El avance matemático puede consistir en construir, demostrar un límite, encontrar un contraejemplo o inventar una herramienta. Nuestro trabajo como estudiantes empieza de la misma manera: entender la pregunta, probar con criterio y explicar lo que sabemos.

La historia que hemos recorrido no acaba con un premio ni con una última fórmula. Acaba con preguntas mejor planteadas. Cuando en clase preguntes «¿por qué?» o «¿funcionaría

siempre?», estarás haciendo algo muy parecido a lo que puso en marcha este viaje.

EJERCICIOS

La máquina del tiempo ya tiene problemas de verdad sobre la mesa. Vamos a medir, construir, repartir y discutir algunas afirmaciones que suenan estupendamente hasta que aparece una cuenta.

Cómo trabajar. Los primeros ejercicios sirven para entrar en calor; después habrá que conectar ideas y justificar decisiones. Un dibujo ayuda, una tabla ayuda y una calculadora a veces ayuda. «Se ve clarísimo» necesita un poquito más de ayuda. Explica siempre qué has demostrado y qué has aproximado. Los datos y los contextos están adaptados para el aula; no son transcripciones de documentos antiguos.

Ejercicio 1 — Un planeta medido desde dos patios

En un modelo de Tierra esférica, dos ciudades se encuentran en el mismo meridiano. Al mismo tiempo, los rayos solares son verticales en la primera y forman 6° con la vertical en la segunda. Suponemos rayos paralelos.

- a) Si la distancia sobre el meridiano es 660 km, estima la circunferencia terrestre.
- b) La distancia no se conoce exactamente: está entre 650 y 670 km. Manteniendo fijo el ángulo, ¿entre qué valores queda tu estimación? Explica por qué una medición aproximada no debería presentarse como un resultado exacto.

Ejercicio 2 — Al-Juarismi diseña un cartel

El diseño de un cartel reúne un cuadrado de lado $x > 0$ y dos rectángulos de lados x y 3. El área total es 27. Usa las piezas para resolver el problema antes de recurrir a la fórmula general: hoy la fórmula espera su turno.

- a) Coloca los rectángulos junto a dos lados consecutivos del cuadrado. ¿Qué pieza falta para completar un cuadrado mayor? Obtén el lado x .
- b) Resuelve también la ecuación sin exigir $x > 0$. ¿Por qué una de sus soluciones no sirve para el cartel?

Ejercicio 3 — La impresora que confunde decimales con exactitud

Una impresora corta un segmento de longitud $1,73$ y lo anuncia como « $\sqrt{3}$, exacto al cien por cien». La publicidad viene muy segura de sí misma.

- Compara $1,73^2$ y $1,74^2$ con 3. Sitúa $\sqrt{3}$ entre dos decimales y revisa el anuncio.
- Demuestra que $\sqrt{3}$ no es racional. Puedes usar que un cuadrado entero solo tiene resto 0 o 1 al dividir entre 3.
- ¿Impide esa irracionalidad construir el segmento exacto con regla sin marcas y compás, a partir de una unidad? Describe una construcción con dos triángulos rectángulos.

Ejercicio 4 — Un generador de primos demasiado optimista

Un vídeo propone multiplicar los primeros números primos y sumar 1. Asegura que el resultado siempre es primo y que Euclides lo dejó demostrado. Vamos a leer la letra pequeña.

- Prueba la receta con 2, 3, 5.
- Con 2, 3, 5, 7, 11, 13, el resultado es 30 031. Comprueba el producto $59 \cdot 509$ y decide si la afirmación del vídeo es correcta.
- Explica qué garantiza realmente la construcción de Euclides, aunque el número obtenido sea compuesto.

No necesitas descubrir una factorización enorme: el posible contraejemplo ya está sobre la mesa.

Ejercicio 5 — La final se queda sin conexión

Un minijuego enfrenta a Aitana y Bruno. Cada ronda es independiente, ambos tienen probabilidad $1/2$ de ganarla y no hay empates. Vence quien consigue primero cuatro rondas. La partida se interrumpe con un marcador de 3 a 1, y hay que repartir 80 puntos de premio según las probabilidades de victoria que tenían.

- Considera tres rondas adicionales, completando rondas imaginarias si alguien vence antes. Organiza los ocho resultados equiprobables y calcula la probabilidad de victoria de cada persona.
- Reparte el premio. ¿Coincide con repartir en proporción 3 : 1, usando solo el marcador actual?

Ejercicio 6 — Herón revisa la ubicación del punto de agua

En un plano medido en metros, una persona va de $A = (1, 2)$ a $B = (7, 4)$, pasando por algún punto Q de una orilla recta $y = 0$. Puede caminar en línea recta por el terreno situado sobre la orilla.

- Usa una reflexión para encontrar el punto Q que minimiza $AQ + QB$, y calcula esa distancia.
- Una compañera propone $Q = (4, 0)$ porque su coordenada horizontal está a mitad de camino entre las de A y B . Calcula su recorrido y explica por qué ese criterio no da el mínimo.

Ejercicio 7 — El museo quiere una visita sin pasillos repetidos

Cuatro salas A, B, C, D están conectadas por seis pasillos: AB, AC, AD, BC, BD, CD . Se puede caminar en ambos sentidos. El museo quiere recorrer cada pasillo exactamente una vez.

- Dibuja el grafo y decide si es posible, permitiendo terminar en una sala distinta de la inicial.
- El museo puede construir pasillos nuevos entre salas ya conectadas. ¿Cuál es el mínimo que debe añadir para poder recorrer todos los pasillos, antiguos y nuevos, una vez y volver al inicio? Indica dónde los colocarías y escribe un recorrido válido.

Dos pasillos entre las mismas salas siguen siendo dos pasillos distintos. La arquitectura todavía no ha aprendido a fusionarlos.

Ejercicio 8 — Un arco que no acepta el «más o menos»

Un diseño utiliza la región bajo $y = 1 - x^2$, entre $x = 0$ y $x = 1$. Queremos encerrar su área entre dos estimaciones con rectángulos, sin usar directamente una primitiva.

- Divide la base en cuatro intervalos iguales. Decide qué extremos dan alturas por defecto y por exceso, y calcula ambas áreas.
- Para n intervalos, llama L_n y U_n a las sumas inferior y superior. Usa la fórmula de la suma de cuadrados para obtener el área exacta como límite.
- Demuestra que $U_n - L_n = 1/n$. ¿Cuál es el menor n que garantiza un intervalo de estimación de anchura no superior a 0,01 unidades de área?

Puedes usar $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Ejercicio 9 — Llegan infinitos autobuses: recepción respira hondo

El hotel de Hilbert tiene ocupadas todas sus habitaciones, numeradas por los enteros positivos. Llegan autobuses numerados $k = 1, 2, 3, \dots$, cada uno con viajeros $m = 1, 2, 3, \dots$. La recepción propone este reparto:

$$\text{Huésped antiguo } n \mapsto 2n - 1 \quad \text{Viajero } m \text{ del autobús } k \mapsto 2^k(2m - 1)$$

- Indica las habitaciones de los tres primeros huéspedes antiguos y de los tres primeros viajeros de los autobuses 1 y 2.
- Demuestra que nadie comparte habitación y que todas las habitaciones quedan ocupadas. Puedes extraer factores 2 de cualquier entero par hasta que quede un número impar.
- ¿Demuestra esto que cualquier conjunto infinito se puede enumerar? Relaciona tu respuesta con la diagonal de Cantor.

Ejercicio 10 — El titular sobre Riemann necesita una revisión

Una cuenta de divulgación prepara tres titulares:

- «Si comprobamos mil millones de ceros, Riemann queda demostrado».
 - «Riemann afirma que todos los ceros de zeta tienen parte real $1/2$ ».
 - «Si Riemann fuera falso, habría que retirar la prueba de Euclides».
- Corrige los tres titulares con una explicación breve. No hace falta resolver la hipótesis para detectar una mala noticia.
 - Recuerda la cota $B(x) = C\sqrt{x}\log x$, con el mismo $C > 0$. Calcula cuánto se multiplica $B(x)$ al pasar de $x = 10^4$ a $x = 10^8$, y cuánto se multiplica $B(x)/x$. ¿Cómo pueden crecer el error permitido y mejorar a la vez su tamaño relativo respecto a x ?

Aquí $\log$ es el logaritmo natural. El apartado b) compara dos valores de la expresión de la cota: no supone que el error real sea igual a ella ni que conozcamos desde qué umbral se cumpliría.

BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

Material docente de partida

- [1] VALLADARES HERRERA, F. J. (2026). *Desafíos matemáticos. Cuadernillo completo*. IES Salmedina. Apuntes docentes para 2.º de Bachillerato de ciencias; del capítulo «Estrategias y técnicas para problemas». Versión de septiembre de 2026, utilizada como material de partida de este tomo.