SESIÓN 3

Congruencias, divisibilidad y múltiplos

Preparación de Olimpiadas Matemáticas

Francisco José Valladares Herrera

Con la financiación de:

Índice

Qué vamos a trabajar en esta sesión.

1. Tres formas de decir lo mismo: congruencias, divisores y múltiplos 1

2. Cuentas con restos y ciclos de potencias 2

3. Cifras, cuadrados y elección del módulo 3

4. Múltiplos que cumplen varias condiciones 4

Retos de entrenamiento 5

Once retos: potencias, cifras, cuadrados y un múltiplo de 600.

Pistas y soluciones 8

Ideas de arranque, desarrollos y respuestas a las pruebas rápidas.

Fuentes 14

Referencias de los ejercicios.

1. Tres formas de decir lo mismo

Antes de calcular, traduce lo que te está pidiendo el problema.

¿Qué es una congruencia módulo d?

Dos números son **congruentes módulo** d si, al dividirlos entre el entero positivo d, **dejan el mismo resto**. Escribimos $a \equiv b \pmod{d}$ y leemos «a es congruente con b módulo d». Por ejemplo, $17 \equiv 5 \pmod{12}$: ambos dejan resto 5. Podemos cambiar uno por otro cuando solo nos interesa el resto.

Otra forma de verlo: su diferencia es un múltiplo de d. Así, $a \equiv b \pmod{d}$ equivale a $d \mid (a-b)$. En el ejemplo, $17-5=12$.

El reloj: ¿qué hora indica -1?

En un reloj de 12 horas, dar una vuelta completa no cambia la posición. Tomamos las 12 como el 0. Desde ahí, avanzar una hora lleva al 1; **retroceder una hora lleva al** 11. Por eso,

$$-1 \equiv 11 \pmod{12}.$$

No hay una hora «menos uno» en la esfera: -1 y 11 indican **la misma posición**. Para pasar de -1 al resto habitual, sumamos 12.

Divisor, múltiplo y resto cero

$$d \mid N \iff N \text{ es múltiplo de } d \iff N \equiv 0 \pmod{d}.$$

Las tres expresiones dicen que $N = dq$ para algún entero q. Por ejemplo: $7 \mid 42$, $42 = 7 \cdot 6$ y $42 \equiv 0 \pmod{7}$.

Ejemplo 1. Un representante cómodo. Como $2026 = 7 \cdot 289 + 3$, tenemos $2026 \equiv 3 \pmod{7}$. También $20 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$: de 6 a -1 hay una vuelta de 7. El resto habitual es 6, pero usar -1 simplifica las potencias.

Divisibilidad que conviene tener a mano.

- Si $d \mid A$ y $d \mid B$, también $d \mid (A+B)$ y $d \mid (A-B)$.
- Ser múltiplo de a y de b equivale a ser múltiplo de $\operatorname{mcm}(a,b)$.
- Si $\operatorname{mcd}(a,b)=1$, entonces $\operatorname{mcm}(a,b)=ab$. Por ejemplo, ser múltiplo de 3 y de 7 equivale a ser múltiplo de 21.

¡Ojo! Ser múltiplo de 4 y de 6 obliga a ser múltiplo de 12, pero no de 24: el propio 12 es un contraejemplo.

Prueba rápida A. Calcula el resto de 2026 entre 9. Después, decide si $2026^2 - 1$ es múltiplo de 9, sin calcular el cuadrado.

2. Hacer las cuentas con los restos

Reducir primero suele ahorrar casi todo el trabajo.

Con un mismo módulo podemos sumar, restar y multiplicar congruencias. También elevar a una potencia entera no negativa:

$$a \equiv b \pmod{m} \implies a^k \equiv b^k \pmod{m} \qquad (k \geq 0).$$

Ejemplo 2. Una potencia grande que se resuelve con un signo

¿Qué resto deja $20^{2025} + 13$ al dividir entre 7?

$$20^{2025} + 13 \equiv (-1)^{2025} + (-1) = -2 \equiv 5 \pmod{7}.$$

La respuesta es $\boxed{5}$. El cálculo acaba cuando expresamos el resultado como uno de los restos $0, 1, \ldots, 6$.

Cómo atacar una potencia

1. Reduce la base con el módulo que pide el problema.
2. Calcula unas pocas potencias hasta reconocer un ciclo.
3. Divide el exponente entre la longitud del ciclo.
4. Usa el resto de esa división para localizar la potencia.

La repetición debe quedar justificada: si $a^t \equiv 1 \pmod{m}$, entonces $a^{qt+r} \equiv a^r \pmod{m}$.

Ejemplo 3. La última cifra de 3^{200}

La última cifra se obtiene trabajando módulo 10:

k	1	2	3	4
$3^k \bmod 10$	3	9	7	1

Como $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ y $200 = 4 \cdot 50$,

$$3^{200} = (3^4)^{50} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Termina en $\boxed{1}$.

Ejemplo 4. Un ciclo corto sin recurrir a Euler

Para hallar el resto de 7^{100} entre 20, observamos que

$$7^2 \equiv 9 \pmod{20}, \qquad 7^4 \equiv 9^2 = 81 \equiv 1 \pmod{20}.$$

Como $100 = 4 \cdot 25$, el resto es $\boxed{1}$.

Dos errores frecuentes. El exponente se reduce con la longitud del ciclo encontrado, no automáticamente con el módulo. Si el exponente es múltiplo de la longitud del ciclo, corresponde al final del ciclo.

Prueba rápida B. ¿En qué cifra acaba 7^{2026}?

3. Cifras, cuadrados y elección del módulo

El enunciado suele dar una pista sobre el módulo que conviene usar.

Qué aparece en el problema	Qué probar primero
Paridad	Módulo 2.
Última cifra / dos últimas cifras	Módulo 10 / módulo 100.
Suma de cifras	Módulo 3 o 9, porque $10 \equiv 1$.
Cifras alternadas	Módulo 11, porque $10 \equiv -1$.
Cuadrados perfectos	Restos posibles módulo 3, 4, 5 u 8.
Un divisor compuesto	Separarlo en factores coprimos.

Ejemplo 5. Una cifra escondida

¿Qué valores de la cifra a hacen que $\overline{4a2}$ sea múltiplo de 9? Como $10 \equiv 1 \pmod 9$, también $100 \equiv 1 \pmod 9$, y

$$\overline{4a2} = 400 + 10a + 2 \equiv 4 + a + 2 = a + 6 \pmod 9.$$

Necesitamos $a + 6 \equiv 0 \pmod 9$. Al ser $0 \le a \le 9$, la única posibilidad es $\boxed{a = 3}$. En efecto, $432 = 9 \cdot 48$.

Módulo 11. En un número de cuatro cifras $\overline{abcd}$,

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \equiv -a + b - c + d \pmod{11}.$$

Así, 2728 es múltiplo de 11, porque $-2 + 7 - 2 + 8 = 11$. No hace falta que la suma alternada valga cero: basta con que sea un múltiplo de 11.

Qué restos puede dejar un cuadrado

Módulo	Restos posibles de x^2
3	$0, 1$
4	$0, 1$
5	$0, 1, 4$
8	$0, 1, 4$

Estas listas se obtienen elevando al cuadrado los restos posibles de x. Si el problema exige un resto que no está en la lista, la situación es imposible.

Ejemplo 6. ¿Puede 2027 ser suma de dos cuadrados enteros? No: $2027 \equiv 3 \pmod 4$, mientras que sumar dos restos de la lista $\{0, 1\}$ solo produce 0, 1 o 2.

Prueba rápida C. Completa la cifra b para que $\overline{53b2}$ sea múltiplo de 11.

4. Múltiplos que cumplen varias condiciones

Una lista corta y bien elegida puede ser mejor que una fórmula nueva.

Ejemplo 7. Repartos con una pieza sobrante

Buscamos el menor entero positivo N que es múltiplo de 5 y que deja resto 1 al dividirlo entre 4 y entre 6.
Las dos últimas condiciones dicen que $N-1$ es múltiplo de 4 y de 6; por tanto, es múltiplo de $\operatorname{mcm}(4,6)=12$. Así, $N=12k+1$. Los candidatos positivos empiezan por

$$1,\ 13,\ 25,\ 37,\ldots$$

El primero que es múltiplo de 5 es $\boxed{25}$. Comprobación: $25=5\cdot 5=4\cdot 6+1=6\cdot 4+1$.

¿Y si aparece una incógnita en una congruencia? Con módulos pequeños se pueden probar los restos posibles. Para resolver $3x\equiv 4 \pmod 7$,

x mód 7	0	1	2	3	4	5	6
$3x$ mód 7	0	3	6	2	5	1	4

Por tanto, $\boxed{x\equiv 6 \pmod 7}$, es decir, $x=7t+6$ con $t\in\mathbb{Z}$.

Cuidado al cancelar

De $2x\equiv 4 \pmod 6$ no se deduce $x\equiv 2 \pmod 6$: $x=5$ cumple la primera congruencia y no la segunda. Aquí sí podemos dividir *los dos miembros y el módulo* entre 2:

$$2x\equiv 4 \pmod 6 \iff x\equiv 2 \pmod 3.$$

Módulo 6, hay dos clases: $x\equiv 2$ y $x\equiv 5$. Se puede cancelar un factor conservando el módulo cuando ese factor es coprimo con él.

Una aplicación. En $6x\equiv 8 \pmod{14}$, dividimos los dos miembros y el módulo entre 2: $3x\equiv 4 \pmod 7$. La tabla anterior da $x\equiv 6 \pmod 7$, es decir, $x\equiv 6$ o $x\equiv 13 \pmod{14}$.

Prueba rápida D. Halla el menor entero positivo que sea múltiplo de 7 y deje resto 2 al dividirlo entre 5.

Antes de entregar un problema. Escribe el módulo elegido, explica por qué se repite el ciclo o por qué se agotan los restos, y comprueba que tu respuesta cumple todas las condiciones. No hace falta una demostración larga; sí un razonamiento que permita ver por qué funciona.

5. Retos: potencias y divisibilidad

Prueba primero por tu cuenta. Las pistas están en el solucionario.

Reto 1. Dos cifras, un millón en el exponente

Fuente: apuntes UGR [1].

Determina las dos cifras finales de $3^{1000000}$. Recuerda que una respuesta como 1 debe escribirse con dos cifras.

Reto 2. Un múltiplo de treinta

Fuente: banco UJA, problema 67 [2].

Para un entero cualquiera a, comprueba que

$$a^5 - a$$

siempre es divisible por 30. Busca una solución con restos pequeños, sin usar el teorema de Fermat.

Reto 3. El mismo ciclo, dos preguntas

IMO 1964, problema 1, apartados a) y b). Reformulación didáctica [3].

a) ¿Para qué enteros positivos n es $2^n - 1$ múltiplo de 7?

b) ¿Existe algún entero positivo n para el que $2^n + 1$ sea múltiplo de 7? Justifica tu respuesta con el mismo ciclo.

Reto 4. Dos potencias que se compensan

OME 2008, fase aragonesa, problema 4 [4].

Sin desarrollar las potencias, explica por qué

$$2222^{5555} + 5555^{2222}$$

es divisible por 7.

Reto 5. Basta distinguir par e impar

OME nacional 1972, problema 7. Reformulación didáctica [5].

Para $n \geq 1$ entero, calcula el resto de

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

al dividir entre 8, y concluye que siempre es múltiplo de 8.

¿Por cuál empezar?

Los retos 1 y 3 practican ciclos; el 2, la separación de un divisor; el 4 combina ambas ideas; el 5 utiliza la paridad de los exponentes. No necesitas calcular ninguna potencia grande.

6. Retos: elegir bien la herramienta

Algunos problemas piden un resto; otros, descartar posibilidades.

Reto 6. Dos cifras más

Fuente: ejercicios de preparamates.com [9]

Halla las dos últimas cifras de 2019^{2020}.

Reto 7. Un divisor compuesto

Fuente: ejercicios de preparamates.com [9]

Decide si, para todo entero $n \geq 1$, la expresión

$$4^{n+1} + 5^{2n-1}$$

es múltiplo de 21. Explica qué ocurre módulo 3 y módulo 7.

Reto 8. Cinco cuadrados seguidos

OME nacional 1977, problema 4. Reformulación didáctica [6].

Toma cinco enteros consecutivos y suma sus cuadrados. ¿Es posible que el resultado sea un cuadrado perfecto? Resuelve la pregunta para cualquier elección de los cinco enteros.

6. Retos: elegir bien la herramienta (continuación)

Combina las ideas de la sesión.

Reto 9. Insertar un cero

OME local 2021, problema 1 de la sesión de mañana del 21 de enero. Reformulación [7].

Un número tiene cuatro cifras. Insertamos un 0 en cualquiera de los tres huecos interiores o al final. Exigimos que los cuatro números de cinco cifras obtenidos sean divisibles por 7. Encuentra todos los números iniciales posibles.

Reto 10. ¿Se llega siempre al uno?

OME local 2020, problema 1 de la sesión de mañana del 17 de enero. Reformulación [8].

Partimos de un entero $n \geq 2$. Mientras no lleguemos a 1, repetimos:

$$\begin{cases} \text{dividir entre 2,} & \text{si el número es par;} \\ \text{sumar 5,} & \text{si es impar.} \end{cases}$$

Determina qué valores iniciales llegan a 1. Explora primero los casos 3, 5 y 7.

Reto 11. Un múltiplo de 600

Fuente: ejercicios de preparamates.com [9]

Para cada entero $n \geq 2$, consideramos

$$a_n = (n^2-1)(n^2+1)(n^4-16)n^2.$$

Explica por qué **todos los términos de esta sucesión son múltiplos de** 600. Busca qué factores aportan los divisores 8, 3 y 25.

Para seguir entrenando. *Fuente: ejercicios de preparamates.com [9].*

Decide si $14^n + 11$ puede ser primo para algún entero $n \geq 0$.

7. Pistas y soluciones: retos 1 y 2

Lee la pista antes de consultar el desarrollo.

1. Dos últimas cifras de $3^{1000000}$

PISTA

Trabaja módulo 100 y calcula 3^5, 3^{10} y 3^{20}.

SOLUCIÓN

Las dos últimas cifras son el resto módulo 100, escrito con dos dígitos. Tenemos $3^5 = 243 \equiv 43$, luego

$$3^{10} \equiv 43^2 = 1849 \equiv 49, \qquad 3^{20} \equiv 49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}.$$

Como $1000000 = 20 \cdot 50000$, resulta $3^{1000000} \equiv 1 \pmod{100}$. La respuesta es $\boxed{01}$.

2. Por qué $30 \mid (a^5 - a)$

PISTA

Separa $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

SOLUCIÓN

Para los factores 2 y 3, utiliza

$$a^5 - a = (a-1)a(a+1)(a^2+1).$$

Entre tres enteros consecutivos hay un par y un múltiplo de 3. Por tanto, el producto es múltiplo de 2 y de 3. Para el factor 5, basta esta tabla:

a mód 5	0	1	2	3	4
a^5 mód 5	0	1	2	3	4
$(a^5 - a)$ mód 5	0	0	0	0	0

Así, también es múltiplo de 5. Como $2, 3, 5$ son coprimos dos a dos, la expresión es múltiplo de $\boxed{30}$.

7. Pistas y soluciones: retos 3 y 4

Continuación.

3. El ciclo de 2^n módulo 7

PISTA

Calcula 2^1, 2^2 y 2^3 módulo 7.

SOLUCIÓN

Los restos son $2, 4, 1$, y $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ justifica la repetición:

n mód 3	0	1	2
2^n mód 7	1	2	4

En a), necesitamos resto 1: $\boxed{n = 3, 6, 9, \ldots}$. En b), necesitaríamos $2^n \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$. Ese resto no aparece, de modo que $\boxed{\text{no existe tal } n}$.

4. Las potencias de 2222 y 5555

PISTA

Las bases son congruentes con 3 y con -3 módulo 7.

SOLUCIÓN

Como $2222 \equiv 3$ y $5555 \equiv -3 \pmod 7$, y 2222 es par, la suma es congruente con $3^{5555} + 3^{2222}$. Además, $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Los exponentes cumplen

$$5555 = 6 \cdot 925 + 5, \qquad 2222 = 6 \cdot 370 + 2.$$

Por tanto, la suma es congruente con $3^5 + 3^2 \equiv 5 + 2 = 7 \equiv 0 \pmod 7$, como queríamos.

8. Pistas y soluciones: retos 5 y 6

Separar casos no significa probar ejemplos: hay que cubrirlos todos.

5. La expresión A_n módulo 8

PISTA

Tanto 5^2 como 3^2 son congruentes con 1 módulo 8.

SOLUCIÓN

El comportamiento depende de si n es par o impar:

	5^n mód 8	3^{n-1} mód 8	A_n mód 8
n impar	5	1	$5+2+1\equiv 0$
n par	1	3	$1+6+1\equiv 0$

Los dos casos dan resto cero, así que $\boxed{8 \mid A_n}$. El caso $n=1$ queda incluido: $3^{n-1}=3^0=1$.

6. Dos últimas cifras de 2019^{2020}

PISTA

Reduce 2019 módulo 100 y busca una potencia de 19 congruente con 1.

SOLUCIÓN

Módulo 100,

$$19^2 \equiv 61, \quad 19^4 \equiv 21, \quad 19^5 \equiv 99 \equiv -1.$$

Así, $19^{10} \equiv 1$ y

$$2019^{2020} \equiv 19^{2020} = (19^{10})^{202} \equiv 1 \pmod{100}.$$

La terminación es $\boxed{01}$.

8. Pistas y soluciones: retos 7 y 8

Continuación.

7. La divisibilidad por 21

PISTA

Usa $21 = 3 \cdot 7$; el exponente $2n-1$ es impar.

SOLUCIÓN

Módulo 3, la expresión es $1^{n+1} + (-1)^{2n-1} = 0$. Módulo 7, escribimos

$$5^{2n-1} = 5(5^2)^{n-1} \equiv 5 \cdot 4^{n-1}.$$

Por tanto,

$$4^{n+1} + 5^{2n-1} \equiv 4^{n-1}(16+5) = 21 \cdot 4^{n-1} \equiv 0 \pmod 7.$$

Es múltiplo de 3 y de 7; como son coprimos, es múltiplo de $\boxed{21}$. Necesitamos $n \geq 1$ para que todos los exponentes usados sean no negativos.

8. La suma de cinco cuadrados consecutivos

PISTA

Llama x al entero central y mira los restos módulo 5.

SOLUCIÓN

La suma es

$$S = (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5(x^2+2).$$

Si $S = y^2$, entonces $5 \mid y^2$, lo que obliga a $5 \mid y$. Por tanto $25 \mid S$, y tendríamos $5 \mid (x^2+2)$. Pero x^2 mód 5 solo puede ser $0, 1, 4$: al sumar 2, los restos son $2, 3, 1$, nunca cero. La suma $\boxed{\text{no puede ser un cuadrado perfecto}}$.

9. Pistas y soluciones: retos 9 y 10

Aquí importa reconocer qué se conserva y qué cambia.

9. Insertar un cero

PISTA

Resta dos números obtenidos insertando el cero en posiciones consecutivas.

SOLUCIÓN

Escribe el número inicial como $\overline{abcd}$, con $a \neq 0$. Los cuatro números resultantes son

$$N_1 = 10000a + 100b + 10c + d,$$
$$N_2 = 10000a + 1000b + 10c + d,$$
$$N_3 = 10000a + 1000b + 100c + d,$$
$$N_4 = 10000a + 1000b + 100c + 10d.$$

Sus diferencias $900b$, $90c$ y $9d$ deben ser múltiplos de 7. Como $900, 90, 9$ son coprimos con 7, las cifras b, c, d son 0 o 7. Ahora $N_1 \equiv 10000a \equiv 0 \pmod 7$; como 10000 es coprimo con 7, también $7 \mid a$. Al ser la primera cifra, $a = 7$.
Obtenemos exactamente

$$\boxed{7000,\ 7007,\ 7070,\ 7077,\ 7700,\ 7707,\ 7770,\ 7777.}$$

Todos funcionan: tras insertar el cero, cada cifra sigue siendo 0 o 7, por lo que cada término de la escritura decimal es múltiplo de 7.

10. Llegar a 1

PISTA

¿Puede un múltiplo de 5 dejar de serlo? ¿Qué ocurre en dos pasos si el número es impar y mayor que 5?

SOLUCIÓN

Sumar 5 conserva la condición de ser múltiplo de 5. Dividir un número par entre 2 también la conserva en ambos sentidos, porque 2 es coprimo con 5. Por tanto, desde un múltiplo de 5 nunca se alcanza 1.
Para cualquier valor mayor que 5, se llega a un número menor en uno o dos pasos: si es par, se divide entre 2; si es impar,

$$n \longmapsto n+5 \longmapsto \frac{n+5}{2} < n.$$

Así se acaba alcanzando un valor entre 1 y 5. Si el inicial no era múltiplo de 5, no podemos llegar a 5.
Los valores $1, 2, 3, 4$ sí terminan en 1: $3 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, y los demás son inmediatos.
La respuesta es $\boxed{n \geq 2 \text{ y } 5 \nmid n}$. Por ejemplo, $5 \to 10 \to 5$ entra en un ciclo.

10. Pistas y soluciones: reto 11

Un divisor grande se puede repartir en objetivos pequeños.

11. Un múltiplo de 600

PISTA

Descompón $600 = 8 \cdot 3 \cdot 25$. Para conseguir 25, necesitas **dos factores** 5, que pueden aparecer en lugares distintos.

SOLUCIÓN

Primero agrupamos dos factores:

$$(n^2-1)(n^2+1) = n^4 - 1, \qquad a_n = (n^4-1)(n^4-16)n^2.$$

1. Encontrar el factor 8. Si n es par, escribimos $n = 2k$: entonces $n^4 - 16 = 16(k^4 - 1)$ ya es múltiplo de 8. Si n es impar, su cuadrado deja resto 1 módulo 8, de modo que $n^2 - 1$ es múltiplo de 8. En ambos casos, $8 \mid a_n$.
2. Encontrar el factor 3. Si n es múltiplo de 3, el factor n^2 lo aporta. En caso contrario, $n \equiv 1$ o -1 (mód 3), así que $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ y el factor $n^2 - 1$ es múltiplo de 3. Por tanto, $3 \mid a_n$.
3. Encontrar el factor 25. Si $5 \mid n$, entonces $25 \mid n^2$, y ya lo tenemos. Si $5 \nmid n$, los restos de n son $1, 2, 3, 4$. Sus cuadrados dejan resto 1 o 4; al volver a elevar al cuadrado,

$$n^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

Por eso **los dos factores** $n^4 - 1$ y $n^4 - 16$ son múltiplos de 5. Su producto contiene $5 \cdot 5 = 25$, así que $25 \mid a_n$.
Juntamos las tres piezas. Como 8, 3 y 25 son coprimos dos a dos, ser múltiplo de los tres equivale a ser múltiplo de su producto:

$$\boxed{600 \mid a_n \quad \text{para todo entero } n \geq 2.}$$

SOLUCIÓN DEL RETO ADICIONAL

$14^n + 11$ nunca es primo. Si n es par, es congruente con $1 + 2 = 0 \pmod 3$ y es mayor que 3. Si n es impar, es congruente con $-1 + 1 = 0 \pmod 5$ y es mayor que 5. Esto incluye $n = 0$, que da 12.

SOLUCIONES DE LAS PRUEBAS RÁPIDAS

A: resto 1; sí, $2026^2 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. B: 9, porque $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ y $2026 \equiv 2 \pmod 4$. C: $b = 0$, pues $-5 + 3 - b + 2 = -b$. D: 7.

Fuentes

Referencias de los ejercicios de la sesión.

Referencias. Los enlaces llevan a los enunciados o a los archivos institucionales consultados. Las explicaciones se han redactado para esta sesión.

[1] Universidad de Granada: Lección 3. Congruencias. Ejemplo sobre las dos últimas cifras de $3^{1000000}$.

[2] Universidad de Jaén: banco de problemas, problema 67. Divisibilidad de $a^5 - a$ por 30.

[3] Archivo oficial IMO: enunciados de 1964, problema 1. Se incluyen sus dos apartados, con redacción adaptada al castellano.

[4] Universidad de Zaragoza: XLIV OME, fase aragonesa, 2008. Problema 4; enunciado y solución en la segunda página del PDF.

[5] Universidad de Jaén: OME nacional 1972, problema 7. Registro 1560.

[6] Universidad de Jaén: OME nacional 1977, problema 4. Registro 1595.

[7] Universidad de Jaén: OME local 2021, sesión del 21 de enero, mañana, problema 1.

[8] Universidad de Jaén: OME local 2020, sesión del 17 de enero, mañana, problema 1.

[9] preparamates.com, sección de Preparación de Olimpiadas.

Los recursos del banco UJA identifican a José Miguel Manzano como autor y anuncian licencia CC-BY. La página UGR está mantenida por P. Jara. Consulta de referencias: 2 de noviembre de 2026.